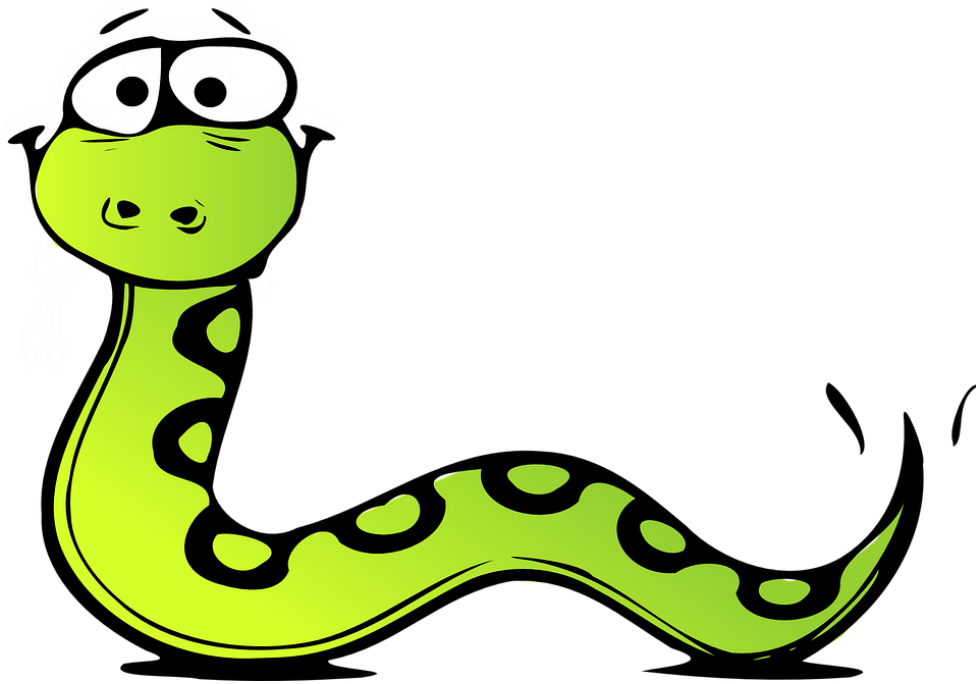


Schlängennest



Mathematik B-Tag

Freitag, 23. November 2018

macht mathe
internationale Mathematikwettbewerbe

Wiskunde voor
teams 

Freudenthal Institute

Ministerium für
Schule und Bildung
des Landes Nordrhein-Westfalen

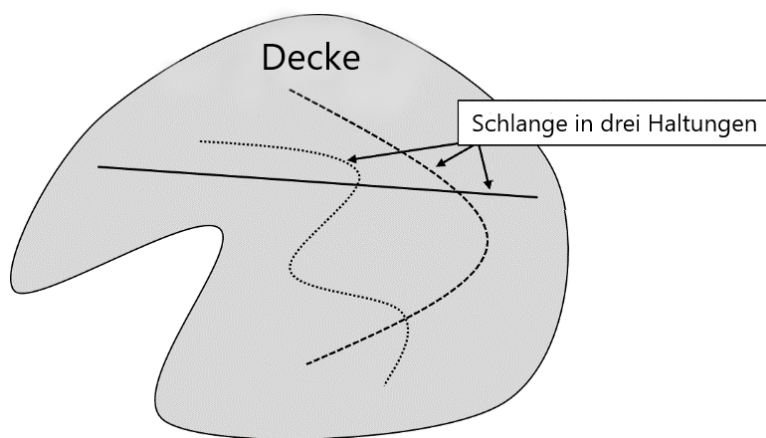


hcm
HAUSDORFF CENTER FOR MATHEMATICS

Einleitung

Über die Aufgaben

In vorliegendem Aufgabensatz geht es um die kleine Schlange Lena und ihren Vater Marko. Lena ist nur 15 cm lang und friert jede Nacht, wenn sie schlafen geht. Marko ist ein liebevoller Vater und beschließt, ihr eine Decke zu stricken. Leider geht es der Familie finanziell gesehen nicht so gut. Darum muss an der Wolle gespart werden. Die Decke, die Marko strickt, sollte also möglichst klein sein. Allerdings lässt sich nicht vorhersagen, in welcher Position Lena nachts einschläft. Als guter Vater will Marko dafür sorgen, dass Lena in jeder Haltung unter die Decke passt. Eure Herausforderung wird sein, die Form und der Flächeninhalt einer möglichst kleinen Decke zu bestimmen. Der Einfachheit halber handelt es sich um eine steife Decke. Sie lässt sich nur verschieben, nicht verformen oder falten.



Mathematisch lautet das Problem wie folgt: Was ist der Flächeninhalt der kleinsten (oder einer möglichst kleinen) flachen Figur (Decke), die alle Kurven (Schlangen) mit einer Länge von 15 cm überdecken kann (nachdem man die Schlange oder Decke so gedreht, verschoben oder gewendet hat, dass es passt). Das ist ein ungelöstes Problem in der Mathematik: Niemand kennt die Antwort!

Tagesablauf

Diese Mathematik B-Tag Aufgabe setzt sich zusammen aus mehreren Basisaufgaben, sowie einer Abschlussaufgabe. Es gibt auch Zusatzaufgaben, die ihr, wie der Name schon sagt, auslassen könnt, wenn zum Beispiel die Zeit nicht ausreicht. Sie tragen aber schon dazu bei, euer Verständnis zu vertiefen und euch herauszufordern. Versucht, etwa die Hälfte der Zeit mit der Abschlussaufgabe zu verbringen. Es handelt sich bei der Abschlussaufgabe um einen Forschungsauftrag. Jeder (oder jede Gruppe) kann seinen ganz eigenen Weg einschlagen.

Benötigte Utensilien

- Ein Stück Kupferdraht, 15 cm lang
- Lose Blätter karierten Papiers
- Schere
- Klebeband
- Laptop/Computer, um den Bericht zu schreiben
- optional: GeoGebra oder ähnliche Programme

Was müsst ihr einreichen?

Im Laufe des Tages erarbeitet ihr einen Bericht in digitaler Form. Diesen reicht ihr um 15 Uhr ein. Darin beschreibt ihr die Lösungen, die ihr zu den Aufgaben gefunden habt, insbesondere die Ergebnisse eurer Erforschung der Abschlussaufgabe. Schreibt deutlich und überzeugend in euren eigenen Worten.

Achtet bitte insbesondere darauf, die Arbeit als ein Gesamtdokument (bitte nicht in mehrere Dateien aufgeteilt) im pdf-Format abzugeben. Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu gewährleisten, erwähnt bitte eure Namen und den Namen der Schule nicht in eurer Arbeit.

Tipps:

- Macht einen Zeitplan und teilt euch die Aufgaben unter den Teammitgliedern auf. Es kann helfen, bereits am Morgen mit der Ausformulierung der Basisaufgaben zu beginnen.
- Formuliert so verständlich, dass jemand, der nicht am Mathematik B-Tag teilgenommen hat (aber genug Mathematik beherrscht) euren Text verstehen kann. Das bedeutet, dass Antworten ausformuliert werden müssen und ihr nicht auf den Aufgabentext zurückverweisen dürft.
- Wenn ihr argumentiert, versucht dies möglichst mit *mathematischen Argumenten* zu tun. Strebt nach einer Kombination aus Klarheit, Kürze und Korrektheit.
- Benutzt Abbildungen, um eure Ideen zu verdeutlichen. Verwendet zum Beispiel Kopien von Skizzen, die ihr gemacht habt (Screenshots oder Fotos von Abbildungen auf Papier).

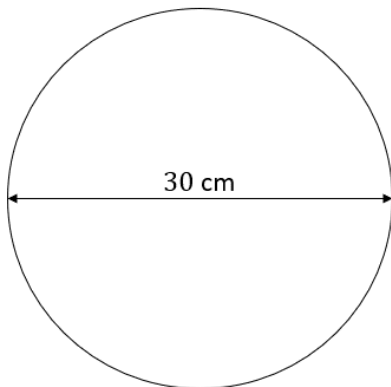
Sowohl der mathematische Inhalt eurer Arbeit, als auch die Qualität der Darstellung werden bewertet.

Basisaufgaben

Aufgabe 1: Runde Decken

Wir nehmen an, dass Lena 15 cm lang ist und superschlank: Ihre Breite beträgt 0. Sie ist wie eine biegsame Linie.

Die erste Decke, die Marko in Betracht zieht, ist kreisförmig, mit einem Durchmesser von 30 cm.



Intuitiv ist klar, dass Lena da immer drunter passt, egal in welcher Haltung sie einschläft.

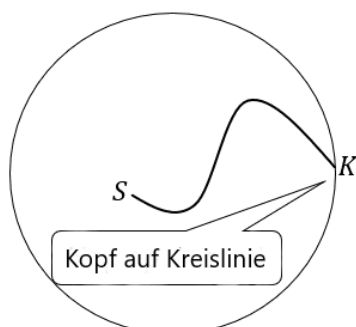
Was wir uns jetzt natürlich fragen, ist, ob der Durchmesser auch kleiner sein kann.

- (a) Untersuche mit Hilfe des Kupferdrahtes, welchen Durchmesser eine kreisförmige Decke mindestens haben muss, damit Lena ungeachtet ihrer Lage immer unter die Decke passt.

In dieser Aufgabe wollen wir natürlich nicht nur experimentieren. Wir wollen auch herausfinden, warum eine bestimmte Decke unseren Wünschen entspricht oder eben nicht. Wenn ihr behauptet, dass die Schlange in jeder Position unter eine auf bestimmte Art geformte Decke passt, dann müsst ihr auch erklären, wie. Wie muss man die Schlange unter die Decke legen (ohne ihre Haltung zu verändern), damit alles passt?

Angenommen ihr betrachtet eine runde Decke mit einem Durchmesser von 20 cm. Es reicht nicht zu sagen:

„Ich lege Lenas Kopf auf die Kreislinie und drehe sie um diesen festen Punkt, bis sie ganz unter der Decke liegt“.

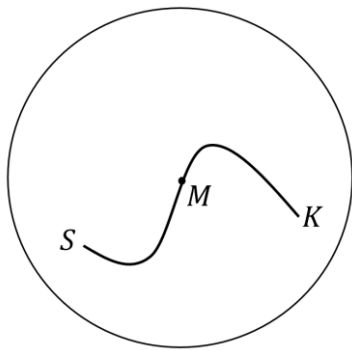


Das funktioniert so nämlich nicht immer!

- (b) Zeichne eine Lage, in der Lena auf diese Art und Weise nicht ganz unter der Decke positioniert werden kann (Die Schlange ist nicht ganz überdeckt).

Ein weiterer Versuch lautet wie folgt:

Nenne den Mittelpunkt des Kreises M . Platziere Lena so, dass die Mitte der Schlange auf dem Punkt M liegt.



Diese Methode funktioniert. Allerdings brauchen wir immer noch eine Erklärung dafür, dass Lena so unabhängig von ihrer Haltung immer ganz von der Decke überdeckt wird.

- (c) Argumentiert, warum diese Methode auf den Kreis, den ihr in (a) gefunden habt, angewendet werden kann.

Die Beschreibung einer solchen Methode, die für jede Lage angibt, wie die Schlange unter die Decke gelegt werden muss (wie oben im *kursiv* notierten Beispiel), nennen wir *Positionierungsstrategie*.

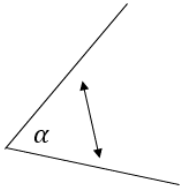
- (d) Erklärt so genau wie möglich, warum Lena nicht in jeder Haltung unter eine kreisförmige Decke passt, die einen Durchmesser kleiner als den in (a) hat.

- (e) **(Zusatzaufgabe: Aufgepasst: schwierig! Nur lösen, wenn genug Zeit vorhanden ist)** Verwendet den Kupferdraht, um zu untersuchen, ob man von dem Kreis mit dem kleinstmöglichen Durchmesser (aus Teil (a)) noch ein Stück abschneiden kann, sodass der Rest, der übrigbleibt, noch immer eine geeignete Decke ist. Gebt die zugehörige Positionierungsstrategie an und erklärt so genau wie möglich, warum die Strategie immer funktioniert.

Aufgabe 2: Die Knickschlange unter einer rechteckigen Decke

Die Schlange kann in unendlich vielen Lagen hingelegt werden, daher ist es schwierig, das vorliegende Problem zu lösen. Der Schwierigkeitsgrad wird drastisch reduziert, wenn wir Schlangen betrachten, die weniger biegsam sind als Lena.

Darum beschränken wir uns für diese Aufgabe auf eine ziemlich steife Schlange, die aus zwei Strecken von je 7,5 cm besteht, die durch ein Scharnier in der Mitte verbunden sind: die Knickschlange. Den Winkel zwischen den zwei Strecken nennen wir α .

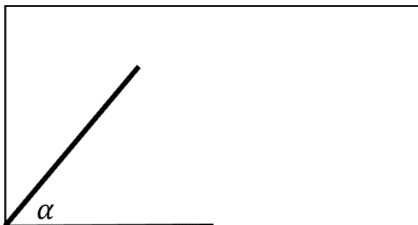


Was unsere Decke angeht, so beschränken wir uns erstmal auf rechteckige Formen.

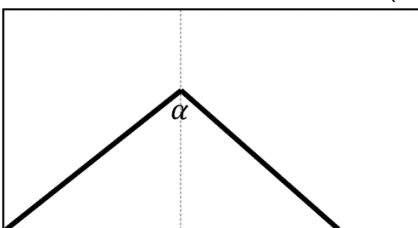
- (a) Wir betrachten zunächst ein Rechteck mit den Maßen 14 x 5 cm und ein Rechteck mit 15 x 5 cm. Verwendet den Kupferdraht, um zu untersuchen, ob die Knickschlange in allen Haltungen unter diese rechteckigen Decken passt. Erläutert eure Lösungen und bestärkt eure Argumente eventuell mit einer Berechnung.

Marko versucht eine kleine rechteckige Decke zu finden. Er denkt sich hierzu die folgende Positionierungsstrategie aus:

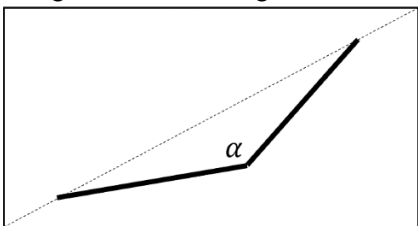
- Für kleine Winkel α legt er eine Seite der Schlange auf die Unterkante (Position 1):



- Für mittelgroße Winkel legt er die Knickschlange so, dass die Symmetrieachse parallel der Seiten der Decke verläuft (Position 2):



- Für große Winkel legt er die Endpunkte auf die Diagonale (Position 3):



Wir wollen diese Strategie nun ausarbeiten mit dem Ziel, ein Rechteck zu konstruieren, das so klein wie möglich ist. Hier wird es etwas komplizierter. Nehmt euch Zeit, experimentiert ein wenig und beratet euch.

- (b) Marko kümmert sich zunächst nur um die Seiten (Höhe) der Decke. Indem er bei einem bestimmten Winkel α von Position 1 zu Position 2 wechselt, kann er die Höhe minimieren. Welcher Winkel ist das? Und wie lang sind die Seiten der Decke dann?
- (c) Bei welchem Winkel sollte Marko von Position 2 zu 3 wechseln? Erklärt eure Lösung und notiert die notwendigen Berechnungen.

- (d) Was ist der Flächeninhalt der kleinsten Decke, die Marko so konstruieren kann?
- (e) Jetzt wo er die rechteckige Decke vor sich hat, erkennt Marko, dass er noch Teile der Decke wegschneiden kann. Seht ihr wie?

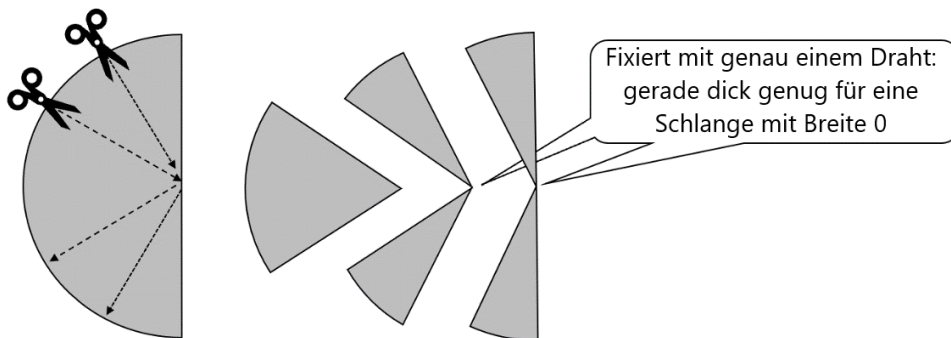
Die Aufgaben 1 und 2 geben euch einen allgemeinen Eindruck davon, wie man das Schlangen-und-Decken Problem näherungsweise lösen kann. Dieselbe Herangehensweise werden wir auch in den folgenden Aufgaben, insbesondere in der Abschlussaufgabe verwenden. Wir fassen die Vorgehensweise im folgenden Schema kurz zusammen.

Schritte zur allgemeinen Vorgehensweise

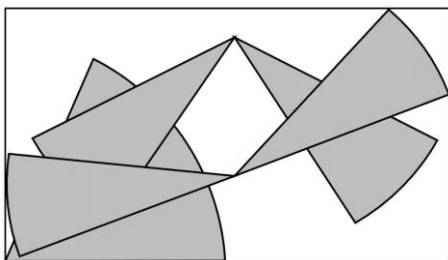
- A. Beschränke dich auf ein Teilproblem: betrachte spezielle Sorten Schlangen und Decken.
- B. Experimentiere.
- C. Gib eine *Positionierungsstrategie* für alle Haltungen der Schlange an.
- D. Bestimme die zugehörigen minimalen Maße der Decke.
- E. Argumentiere, dass die Decke die Schlange unabhängig von ihrer Lage mit der Strategie aus C gänzlich überdecken kann.
- F. Eventuell: Stutze die Decke.

Aufgabe 3: Schieben mit Fächerdecken für Knickschlangen

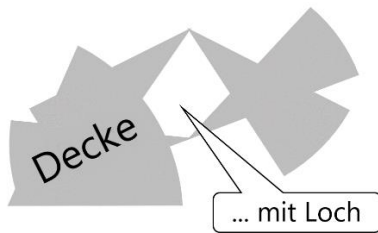
Man kann auch auf eine andere Art versuchen, eine Decke für Knickschlangen zu machen. Beginne mit einem Halbkreis und schneide diesen in drei *Fächerdecken*, für kleine, mittlere und große Winkel in der Knickschlange.



Nun ordnet man die Teile geschickt innerhalb eines Rechtecks an, um eine kleinere rechteckige Decke zu machen, beispielsweise:



Noch besser ist es, den Teil des Rechtecks, der nicht mit den Fächerdecken überlappt, wegzuschneiden. Das resultiert in einer unschönen, aber kleineren Decke (eventuell sogar mit einem Loch darin):



(Dass wir *drei* Fächer gewählt haben ist hier willkürlich. Vielleicht geht es mit *mehr Fächern* sogar noch besser).

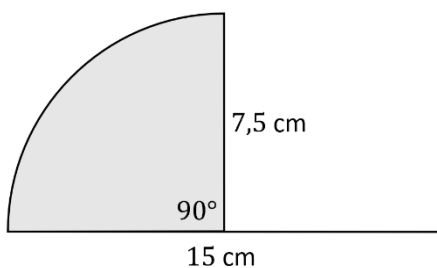
Bastelt aus dem Karopapier einen Halbkreis mit Radius 7,5 cm und schneidet diesen in eine selbstgewählte Menge Fächerdecken (verwendet Klebeband, um die Eckpunkte zweier Keile zusammen zu halten).

Schiebt die Decken übereinander zu einer kleineren Decke, je kleiner, desto besser. Fügt eurem Bericht ein Foto hinzu. Wenn ihr euch mit GeoGebra oder einem ähnlichen Programm auskennt, könnt ihr die Aufgabe auch auf diese Weise lösen. Gebt eine Erklärung und eventuell eine Berechnung zu euren Ergebnissen. Ihr könnt die Fläche der Decke auch abschätzen, zum Beispiel indem ihr Kästchen zählt.

Bemerkung: die *Sorte Decke*, auf die wir uns hier beschränken (Teil A aus obenstehendem Schema) ist also nicht nur eine einzige Form, sondern ein paar Formen, die man versucht optimal übereinander zu legen! Das ist das Experimentieren (Teil B des Schemas). Teile C, E und F sind nun vergleichsweise simpel. Teil D kann allerdings noch ziemliche Schwierigkeiten verursachen.

Aufgabe 4: Decken mit einem Steg

Ein anderer Deckentyp für Knickschlangen sieht aus wie ein Viertelkreis (Keule) mit einem Radius von 7,5 cm und einer "sehr dünnen" Strecke von 7,5 cm von der Mitte nach rechts.



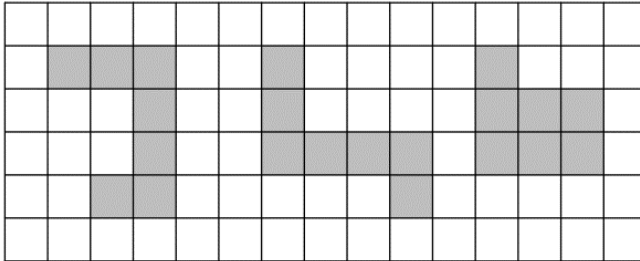
- Verwendet den Kupferdraht um zu untersuchen, wie die Knickschlangen hierunter passen. Beschreibt die Positionierungsstrategie.
- Könnt ihr, ausgehend von einem Kegel mit einem Winkel kleiner als 90° , auf vergleichbare Art eine geeignete Decke machen? Mit noch kleinerem Winkel?

In Teilaufgabe (b) habt ihr sicher bemerkt, dass man den Flächeninhalt willkürlich klein machen kann. Daraus lässt sich schließen, dass wir das Problem durch die Knickschlangen zu sehr vereinfacht haben. Dennoch ist es die Mühe wert, Probleme erst vereinfacht zu betrachten, da man auf diese Weise oft Strategien entwickelt, die sich auf das nicht-vereinfachte Problem anwenden lassen.

Aufgabe 5: Pixelschlangen

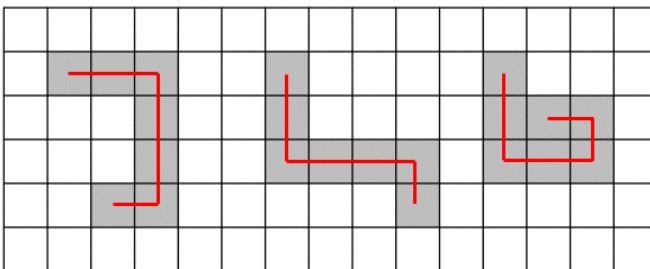
Eine gänzlich andere Art das Problem zu vereinfachen, ist das Betrachten von Schlangen und Decken, die aus kleinen Quadraten in einem Gitter bestehen: Pixelschlangen und Pixeldecken.

Hier einige Beispiele für Pixelschlangen mit Länge 7:

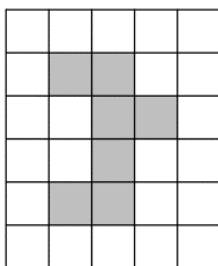


Bei einer Pixelschlange gilt, dass jedes Quadrat ihres Körpers mit einer Seite an der Seite eines anderen Quadrats anliegt. Die Quadrate können sich nicht überlappen.

Mit einer Linie durch die Mitten der Quadrate lässt sich angeben, wie die Schlange liegt. Man beachte, dass es bei der Schlange unten rechts drei mögliche Lagen gibt.



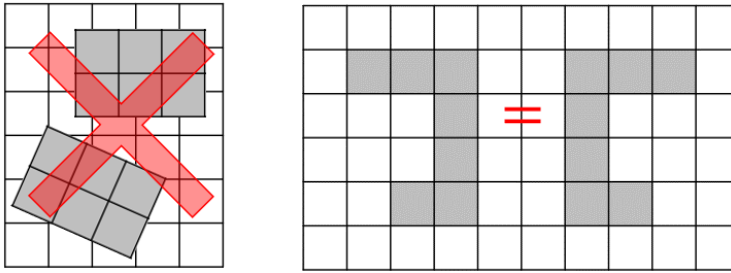
Untenstehende Abbildung kann nicht zu einer Pixelschlange gehören.



- (a) Zeichnet alle möglichen Positionen auf, die eine Pixelschlange mit Länge 4 einnehmen kann.

Bevor wir untersuchen können, was geeignete Decken für Pixelschlangen sind, müssen wir genau definieren, wie man die Schlangen verschieben und bewegen darf (ohne ihre Haltung zu ändern). Wir legen das Folgende fest:

- Pixelschlangen darf man verschieben und drehen, aber nur so, dass die Quadrate der Schlange genau auf den Quadraten des Gitters aufliegen. Die Schlange kann also nicht *schief* oder nur *halb auf dem Gitter* liegen.
- Man darf Pixelschlangen spiegeln, beziehungsweise hochheben und mit der Oberseite nach unten zurücklegen.

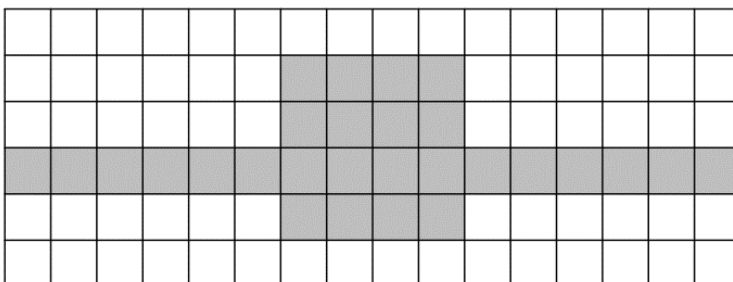


In den kommenden Aufgaben werdet ihr jeweils eine Decke entwerfen. Denkt dazu an die Schritte A bis F zur allgemeinen Vorgehensweise.

- (b) Findet eine Decke für Pixelschlangen mit Länge 4, die so klein wie möglich ist. Gebt die zugehörige Positionierungsstrategie. Erklärt, warum ihr denkt, dass die Decke nicht noch kleiner konstruiert werden kann.
- (c) Findet eine möglichst kleine Decke für eine Pixelschlange mit Länge 5. Gebt die zugehörige Positionierungsstrategie. Erklärt, warum ihr denkt, dass die Decke nicht noch kleiner konstruiert werden kann.
- (d) **(Zusatzaufgabe, nur bearbeiten, wenn genügend Zeit ist)**
Findet eine möglichst kleine Decke für eine Pixelschlange mit Länge 6. Gebt die zugehörige Positionierungsstrategie. Erklärt, warum ihr denkt, dass die Decke nicht noch kleiner konstruiert werden kann.

Vielleicht wird es bei Teil (d) schon schwierig zu erklären, warum es nicht mehr kleiner geht. Wenn eure Positionierungsstrategie gut ist und ihr euch sicher seid, dass die Schlange in jeglicher Haltung unter die Decke passt, dann wisst ihr zumindest, dass der Flächeninhalt der kleinsten Decke mindestens so klein ist wie der eurer Decke. Mit anderen Worten: Ihr habt eine Obergrenze für die Größe der Decke gefunden.

Untergrenzen kann man auch suchen. Beispielsweise lässt sich begründen, dass eine Decke für eine 16 Quadrate lange Pixelschlange mindestens 28 Quadrate groß sein muss: Die lang gestreckte Schlange und die zu einem Quadrat eingerollte Schlange müssen beide unter die Decke passen, überlappen aber nur in maximal vier Quadraten. Darum gilt, dass die Decke mindestens $16+16-4=28$ Quadrate haben muss.



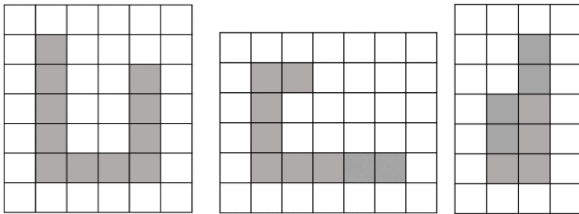
- (e) Findet eine höhere Untergrenze für Pixelschlangen mit Länge 16, indem ihr der eben gegebenen Begründung (mindestens) eine Haltung der Schlange hinzufügt. Erklärt auch genau wie ihr an die Untergrenze gekommen seid.

Eine Knickpixelschlange ist eine Pixelschlange mit nur genau einem Knick (siehe Aufgabe 2), allerdings muss der Knick hier *nicht* unbedingt in der Mitte sein.

- (f) Beschreibt eine Decke für eine Knickpixelschlange mit Länge n für jede positive ganze Zahl $n = 1, 2, 3, \dots$. Gebt eine Formel in n für den Flächeninhalt der Decke. Tipp: Versucht erst die kleinstmögliche Decke für kleine Werte von n (zum Beispiel 1 bis 7) zu bestimmen und eure Ergebnisse dann zu verallgemeinern.

(Zusatzaufgabe)

Eine U-Pixelschlange ist eine Pixelschlange mit zwei Knicken von je 90 Grad, sodass die Schlange eine U-artige Form annimmt, siehe unten für Beispiele:



Das Mittelstück (zwischen den beiden Knicken) darf übrigens auch bloß 2 Quadrate lang sein, wie im rechten Beispiel.

Eine Obergrenze für den Flächeninhalt einer minimalen Decke für eine Pixelschlange mit Länge n ist n^2 . So eine Schlange passt nämlich in jeder Lage unter eine quadratische Decke mit Seitenlänge n . Ihr könnt speziell für U-Pixelschlangen kleinere Decken machen und damit auch eine bessere Obergrenze bestimmen!

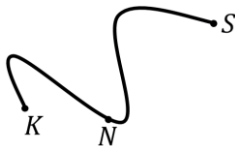
- (g) **(Zusatzaufgabe)** Gebt eine Formel in n für eine bessere Obergrenze für die Fläche einer Decke für U-Pixelschlangen mit Länge n für positive ganze Zahlen $n = 1, 2, 3, \dots$

Aufgabe 6: Eine Decke für alle Lagen

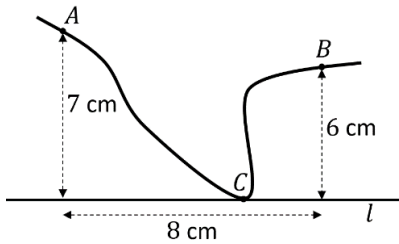
Zurück zum **allgemeinen** Problem! Wie können wir argumentieren, dass eine Schlange immer unter eine Decke passt? In dieser Aufgabe stattdessen wir euch mit Hilfe zweier Fragen mit praktischen Argumentationsschritten aus und wenden diese später auf eine rautenförmige Decke an.

Die Schlange ist noch immer 15 cm lang.

- (a) Angenommen der Kopf der Schlange ist auf Punkt K , das Schwanzende in Punkt S und irgendwo windet sich der Körper auch durch Punkt N . Es gilt $|KN| + |NS| \leq 15$. Warum?

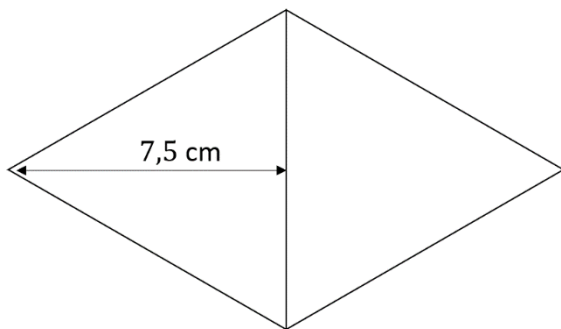


- (b) Angenommen der Körper der Schlange verläuft unter der Decke durch Punkt A und durch Punkt B . Gerade l ist der Rand der Decke. Die Abstände entsprechen denen in untenstehender Abbildung.
Ist es möglich, dass die Schlange in einer Position liegt, so dass sie den Rand der Decke berührt?



Tipp: Spiegelt Punkt B und das Stück des Schlangenkörpers zwischen Punkt C und B an Gerade l .

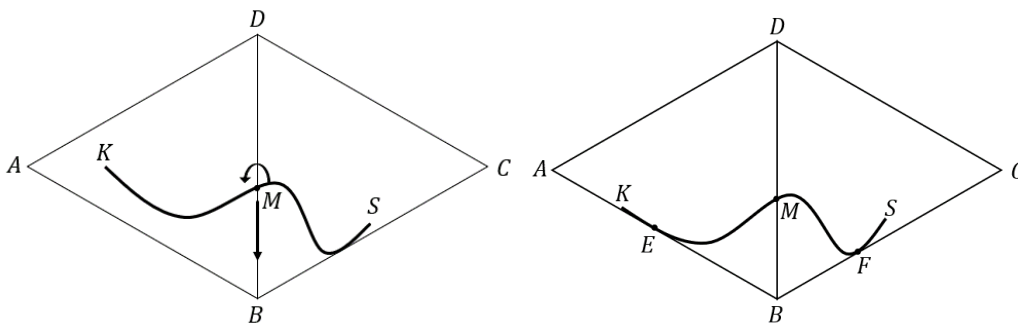
Wir lassen nun den Typ der Schlange allgemein, beschränken jedoch die Form der Decke: Eine Decke besteht nun aus zwei aufeinander stehenden gleichseitigen Dreiecken mit einer Höhe von je $7,5$ cm.



(c) Bestimmt den Flächeninhalt der Decke.

Positionierungsstrategie (siehe Abbildungen unten):

Man lege die Mitte M der Schlange auf die Diagonale BD , so dass das Schwanzteil MS der Schlange Geradenstück BC berührt (linke Abbildung). Man verschiebe dann M entlang BD nach unten und rotiere um M (so, dass Schwanzteil MS weiterhin Geradenstück BC berührt) bis das Kopfteil KM Geradenstück AB berührt (rechte Abbildung). Im Extremfall geschieht das erst, wenn M auf B liegt.



(d) Zeigt, dass die Schlange auf diese Weise immer unter die Decke passt.

(e) **(Zusatzaufgabe)** Lassen sich noch Teile der Decke abschneiden?

Abschlussaufgabe

Die Abschlussaufgabe, an der ihr während der zweiten Hälfte des Tages arbeiten solltet, lautet wie folgt: Entwerft eine möglichst kleine Decke für die 15 cm lange Schlange. Verwendet hierzu das zuvor besprochene Schema:

Eine **allgemeine Vorgehensweise** für das Problem ist die Folgende:

- A. Beschränke die *Sorten* von Schlangen und *Sorten* von Decken.
- B. Experimentiere.
- C. Gib zu den Decken eine *Positionierungsstrategie* für alle Haltungen der Schlange an.
- D. Finde die zugehörigen minimalen Maße.
- E. Argumentiere, dass mit der Strategie aus C alle Schlangen komplett bedeckt werden.
- F. Eventuell: Stutze die Decke.

Beschreibt diese Schritte in eurem Bericht. Ihr seid nicht verpflichtet, euch auf Teilprobleme zu beschränken (wie in Punkt A beschrieben). Es ist aber sehr wichtig, dass ihr eine verständliche Positionierungsstrategie habt und deutlich erläutert, dass diese auch tatsächlich funktioniert. Wenn die Berechnung zu D nicht exakt gelingt, dann könnt ihr euch auch darauf beschränken, eine gute Schätzung zu geben. Sollte die Argumentation bei E nicht gelingen, könnt ihr stattdessen eure intuitiven Vermutungen darlegen.

Der Gebrauch von Programmen wie zum Beispiel GeoGebra ist erlaubt.

Viel Erfolg!

