

Mathematik B-Tag 2012

Freitag den 16. November, 9:00-16:00 Uhr

Mathematik entFalten

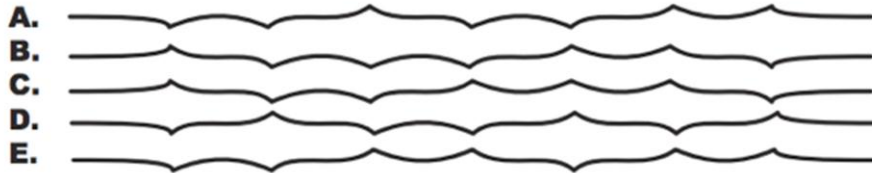


Der "Mathematik B-Tag" wird möglich gemacht, durch:

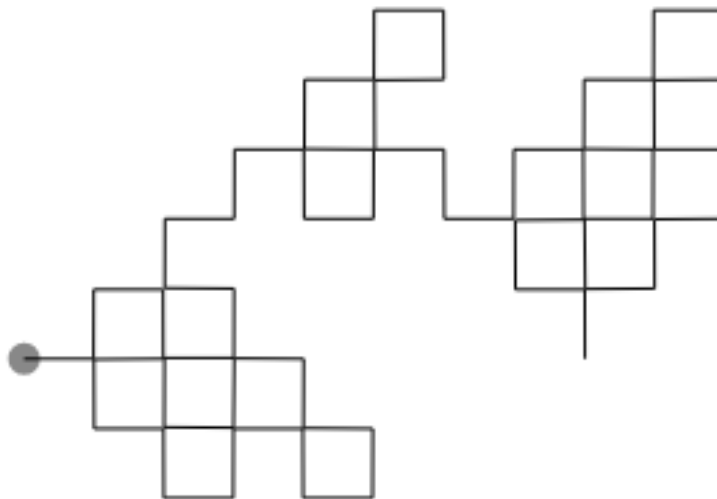


Problem 6 des Wettbewerbs des niederländischen Känguru-Wettbewerbs

Ein Papierstreifen wird dreimal gefaltet. Dann wird er wieder aufgefaltet. Stellt man diesen Papierstreifen auf eine Kante, kann man ihn von oben betrachten. Welche der folgenden Zeichnungen, der Kante, ist falsch?



Das folgende Bild zeigt eine labyrinthartige Figur, die Sie erhalten, wenn Sie einen Streifen Papier sechsmal nach einem vorgegebenen Faltrezept falten. Nach sechsmaligem Falten wird der Streifen wieder aufgefaltet, sodass in den Knicken ein 90° Winkel entsteht:



Um solche labyrinthartigen Faltungen, die durch ein Faltrezept entstehen, geht es in diesem Jahr beim Mathematik B-Tag.

Einführung in die Aufgabe

Die Aufgabe, um die es dieses Jahr beim Mathematik B-Tag geht, ist vom Design her sehr einfach: Es geht um das wiederholte Falten von Papierstreifen, nach einem vorgegebenen Faltrezept. Scharfe Kanten sorgen dafür, dass Sie nach dem Auffalten eine schöne geometrische Figur erhalten, die aus geraden Linien besteht, die entweder nach links oder nach rechts einen scharfen Knick machen.

Das Faltrezept ist einfach, aber es werden überraschenderweise Muster entstehen, die sehr schnell komplex erscheinen werden; um die Untersuchung solcher Muster geht es.

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, dass Sie die Muster erklären können und diese auch (ohne zu falten) vorhersagen können. Dies gilt nicht nur für Muster, die Sie selber gefaltet haben, sondern auch für solche, die Sie z.B. nach 63 Faltungen erhalten würden. Das kann man nun wirklich nicht mehr mit einem Papierstreifen ausprobieren.

Struktur der Aufgabe

In **Teil A** (Einführung) werden Sie mit spezifischen Fragen an das Thema herangeführt, indem Sie verschiedene Faltungen vornehmen und die so entstehenden Muster auf ihre Eigenschaften untersuchen. Probieren Sie eigene Faltungen und beobachten Sie den Prozess des Faltens und das Endresultat das daraus entsteht. Dies wird Sie bei Ihren eigenen Untersuchungen in Teil B weiterbringen.

Nach diesen Untersuchungen sind Sie im Stande in **Teil B** Ihre eigenen Überlegungen anzustellen und diesen nachzugehen. Es wird Untersuchungsvorschläge geben, darüber hinaus können Sie aber auch Ihre eigenen Erkundungen anstellen. Es gibt sehr viel zu entdecken.

Wichtig ist, dass Sie in ihrem Bericht über die Aktivitäten dieses Tages einem Außenstehenden mit Sinn für Mathematik deutlich machen, was Sie entdeckt haben. Dabei können Sie die aus Teil A vorgeschlagenen Arten und Weisen der Darstellungen verwenden, aber auch eigene Ideen und Vorschläge sind selbstverständlich willkommen.

Außerdem erhalten Sie ein Applet, das solche Muster herstellen kann. Fangen Sie nicht zu schnell mit dem Applet an.

Sorgen Sie in der Erkundungsphase dafür, dass Sie selbst Papierstreifen falten, damit Sie ein Gefühl für den Faltprozess und die Resultate kriegen. Benutzen Sie das Applet also erst in Teil B. Es kann Ihnen während Ihrer Ausarbeitung beim Finden und Überprüfen von Ideen eine große Hilfe sein.

Einteilung des Tages

- Nehmen Sie sich mindestens zwei Stunden Zeit um in Teil A ordentlich zu falten und die entstehenden Muster zu untersuchen. Insbesondere bestimmt das intensive Arbeiten in Teil A, wie tief Ihre Untersuchungen in Teil B gehen können.
- Planen Sie genügend Zeit für Ihren Bericht ein. Dieser muss um 15 Uhr eingereicht werden. Fangen Sie daher nicht zu spät damit an.

Das Endprodukt

Der Gegenstand dieses Mathematik B-Tags eignet sich sehr gut für eine Ausarbeitung, die nicht sklavisch den vorgegebenen Aufgaben und Vorschlägen unterliegt. Sorgen Sie dafür, dass die Ausarbeitung auch von jemandem gelesen werden kann, der die Aufgabenstellung nicht gelesen hat.

Falls Sie etwas Handgeschriebenes abgeben, schreiben (und zeichnen) Sie mit einem **schwarzen Stift**. Der Bericht muss nämlich gut zu kopieren sein.

Viel Erfolg und Spaß mit den Aufgaben

TEIL A: Einstieg

Einleitung

Für die Aufgaben des Mathematik B-Tags benötigen Sie Papierstreifen; viele Streifen! Die genauen Abmessungen dieser Papierstreifen sind nicht von Belangen. Sie können z.B. ein A4 Format der Länge nach in acht Streifen teilen. Das eine Ende des Streifens wird schwarz markiert. Das ist der Ausgangspunkt.



Legen Sie den Streifen vor sich auf den Tisch, mit der schwarzen Markierung zu Ihnen, wie oben gezeigt. Dann falten Sie den Streifen hin und her, ohne ihn in der Zwischenzeit wieder zu entfalten. Sie falten immer das eine Ende des Streifens an den Ausgangspunkt. Nach einer Anzahl Faltungen ziehen Sie den gefalteten Streifen wieder auseinander; Sie können immer wieder den Ausgangspunkt mit der schwarzen Markierung finden.

Es kann auf zwei Arten gefaltet werden:

- Von sich weg falten, also links herum. Das rechte Ende wird von hinten auf den Ausgangspunkt gelegt: das bezeichnen wir mit l
- Zu sich her falten, also rechts herum. Das rechte Ende wird von vorne auf den Ausgangspunkt gelegt: das bezeichnen wir mit r



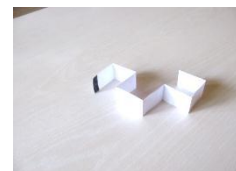
Der zusammengefaltete Papierstreifen wird auf die beschriebene Art und Weise wieder gefaltet und so geht das die restlichen Faltungen weiter. Jedes Mal haben Sie die Wahl zwischen l und r .

Ein **Faltrezept** ist eine Reihe von Buchstaben l und r . Damit werden die Faltvorgänge vorgeschrieben. Das Rezept führen Sie von links nach rechts aus. Ein Beispiel soll verdeutlichen was gemeint ist. Für das Faltrezept $l r r$ sehen Sie drei Faltschritte:

1. Schritt: l , also links	2. Schritt: r , also rechts	3. Schritt: r , also rechts

Nachdem Sie das Faltrezept ausgeführt haben, machen Sie folgendes:

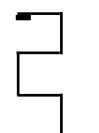
- Falten Sie den Streifen wieder auseinander, so dass jeweils ein 90° -Winkel in den Knicken entsteht
- Stellen Sie den aufgefalteten Streifen auf eine Kante vor sich auf den Tisch und zwar so, dass die markierte Stelle auf der linken Seite ist und zu Ihnen zeigt.



Das Resultat sehen Sie auf dem Foto rechts.

Schaut man von oben auf die Figur, sieht sie aus, wie rechts abgebildet. Diese nennen wir ein **Verlaufsmuster**.

Das Verlaufsmuster zeichnen wir meistens so, dass vom Ausgangspunkt aus horizontal nach rechts gestartet wird.







Dieses Verlaufsmuster kann auch durch einen Buchstabencode beschrieben werden. Stellen Sie sich vor, dass Sie vom Ausgangspunkt bis zum Endpunkt des Verlaufsmusters laufen. Erst laufen Sie ein Stück nach rechts, dann kommt ein Knick, es geht 90° nach links oder 90° nach rechts. Nachdem Sie erneut ein Stück gelaufen sind, kommt wieder ein Knick nach links (*L*) oder nach rechts (*R*). Nur die Knicke sind von Interesse; die Stücke zwischen zwei Knicken sind immer gleich lang. Zu dem Verlaufsmuster des obigen Bildes gehört der Code *RRLLRLL*. Solch eine Buchstabenreihe bezeichnen wir als **Verlaufscod**.

Beim Falten und Entfalten sind also zwei Dinge wichtig:

- Das **Faltrezept**. Das gibt an wie gefaltet werden muss; durch eine Reihe von Buchstaben *l* und *r*.
- Das **Verlaufsmuster**. Das ist das Resultat nachdem ein Faltrezept ausgeführt wurde; beschrieben durch ein Bild und den dazugehörigen **Verlaufscod** *L* und *R*.

Orientierende Untersuchung

In der nachfolgenden Tabelle sind die vier Faltrezepte, mit jeweils zwei Faltungen und ihre Verlaufsmuster mit ihren dazugehörigen Verlaufscodes aufgelistet. Im Bild wird stets horizontal nach rechts gestartet, aber das dient alleine dazu, um zu wissen wie man anfangen soll.

Faltrezept	Verlaufsmuster
<i>rr</i>	 <i>RRL</i>
<i>rl</i>	 <i>LRR</i>
<i>lr</i>	 <i>RLL</i>
<i>ll</i>	 <i>LLR</i>

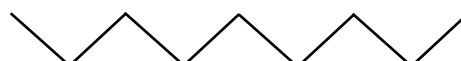
Überprüfen Sie die vier Möglichkeiten, indem Sie das Faltrezept ausführen und das Resultat, sowie dessen Entstehung, aufmerksam studieren.

Um mit den Faltrezepten und den entsprechenden Verlaufsmustern weiter vertraut zu werden, können Sie zuerst alle möglichen Faltrezepte von drei Faltungen ausführen.

Für die Argumentation über die Faltrezepte und die entsprechenden Verlaufsmuster ist es nützlich, zunächst konkrete Beispiele selber mit Papierstreifen auszuführen.
Überspringen Sie diesen praktischen Teil also nicht!

◆ 1. Erkundungsfrage

- Es gibt acht Möglichkeiten für ein Faltrezept mit drei Faltungen. Welche sind das?
- Fertigen Sie eine Tabelle (wie oben für zwei Faltungen) für drei Faltungen an: das Faltrezept und das dazugehörige Verlaufsmuster.
- Ein Zickzackmuster, wie es hier abgebildet ist, kann nicht das Ergebnis eines Faltrezeptes sein. Das kann man schon von vorneherein wissen. Warum?



Bei zwei Faltungen erhalten Sie sowohl eine feste Anzahl von geraden Strecken (4), wie auch eine feste Anzahl von Knicken (3)

◆ **2. Erkundungsfrage**

- Wie viele gerade Strecken und wie viele Knicke hat ein Verlaufsmuster mit drei Faltungen?
- Wie viele gerade Stücke und wie viele Knicke hat ein Verlaufsmuster wenn man n mal faltet ($n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$)?
-

Die Anzahl der Knicke

Bei vier Faltungen erhalten Sie, nach dem Auffalten, insgesamt 16 Stücke und 15 Faltnissen, die im unteren Bild als gestrichelte Linien eingezeichnet sind. Die Nummerierung fängt am Anfang des aufgefalteten Streifens an und jede Position beschreibt einen Knick des Verlaufsmusters bzw. des Verlaufscodes.



◆ **3. Erkundungsfrage**

- An welcher Position (bei welcher Zahl im vorangegangenen Bild) befindet sich die erste Faltung?
Und welche Nummern gehören zur zweiten, zur dritten und zur vierten Faltung?
An welcher Stelle kann man ein L oder ein R finden, wenn man nach einem Faltrezept faltet? Sie erhalten die Information, dass sich an den Positionen 2, 7, 8 und 12 ein R befindet. Damit lässt sich das gesamte Verlaufsmuster rekonstruieren.
- Finden Sie die anderen Knicke L und R auf den übrigen Positionen von 1 bis 15.
- Geben Sie auch das Faltrezept an.

◆ **4. Erkundungsfrage**

Wir gehen von einem Faltrezept mit sechs Faltungen aus:
Sie haben dann ein Verlaufsmuster mit 64 geraden Stücken und 63 Knicken

- Extra Information: an der ersten Position steht ein R .
Von welchen der anderen 62 Knicke, wissen Sie nun, ob es ein R oder ein L ist?
- Noch mehr Information: das Verlaufsmuster fängt mit $RLLR$ an.
Von wie viel Knicken können Sie nun noch nicht wissen ob sie R oder L sind?

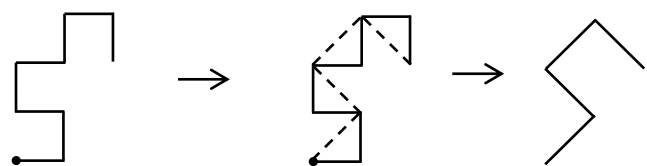
◆ **5. Erkundungsfrage**

- Warum kann die nebenstehende Figur nicht das Ergebnis eines Faltrezeptes sein?
- Warum stellt die Reihe $RLLRRLLRLLRRRL$ kein Verlaufsmuster dar?



Der Zusammenhang zwischen zwei Verlaufsmustern

In einem gegebenen Verlaufsmuster verbinden wir die Eckpunkte von jedem zweiten Knick miteinander, wobei wir beim Ausgangspunkt anfangen. Die gestrichelte Linie, im Bild in der Mitte, zeigt dies. Sie geht vom Ausgangspunkt aus bis zum Endpunkt des Verlaufsmusters indem sie immer einen Knick überspringt.



Dadurch erhalten wir das Ergebnis, das im rechten Bild zu sehen ist. Scheinbar entsteht ein neues Verlaufsmuster, das durch eine Anzahl von Faltungen entstanden ist.

TEIL B: KOMPLEXE EINFACHHEIT: EIGENE FORSCHUNGEN

In den Erkundungsfragen von Teil A haben Sie alles sehr experimentell untersucht, indem Sie selber Streifen gefaltet haben. Benutzen Sie Ihre Erkenntnisse um nun tiefer in die Geheimnisse der Verlaufsmuster, die durch andere Faltrezepte entstehen, vorzudringen.

Vereinbarung

Benutzen Sie das Applet um eine Vermutung, die Sie haben auf Richtigkeit zu überprüfen. Nur weil es ein paar Beispiele gibt, beweist das nicht Ihre Vermutung. Versuchen Sie daher auch immer schlüssige Argumente zu finden um Ihre Vermutung zu beweisen.

Drei Behauptungen:

Hier sind drei wahre Behauptungen aufgeführt, die durch eine Frage ergänzt werden. Diese können bei der Forschung helfen. Selbstverständlich sind Behauptungen zu eigenen Entdeckungen auch willkommen.

➤ Behauptung 1:

Für jedes Verlaufsmuster gilt, dass das erste und das letzte gerade Stück senkrecht zueinander stehen.

Frage:

Können Sie schlüssige Argumente finden, um zu zeigen, dass das immer wahr ist?

➤ Behauptung 2:

Bei einem gegebenen Faltrezept können Sie von jedem Knick des dazugehörigen Verlaufsmusters vorhersagen, ob sich dort ein L (linksrum) oder ein R (rechtsrum) befindet.

Frage:

Wie können Sie bei einem Faltrezept $rrrlrrrlr$ vorhersagen um was für einen Knick (L oder R) es sich an der 17. Position handelt?

➤ Behauptung 3:

Bei einem gegebenen Verlaufsmuster bzw. Verlaufscodex können Sie jederzeit sagen, welches Faltrezept dazugehört.

Frage:

Können Sie ein allgemeines "Rezept" angeben, womit Sie von einem gegebenen Verlaufsmuster das dazugehörige Faltrezept angeben können?

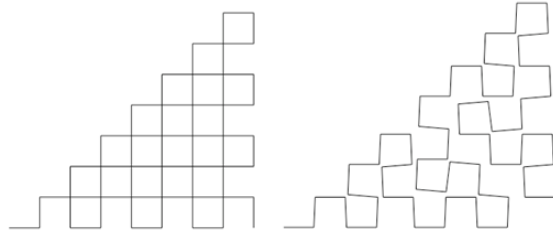
Weitere Vorschläge:

Weiter unten finden Sie einige Ideen, die untersucht werden könnten. Suchen Sie sich hiervon Aufträge aus oder entwickeln Sie selber Forschungsfragen.

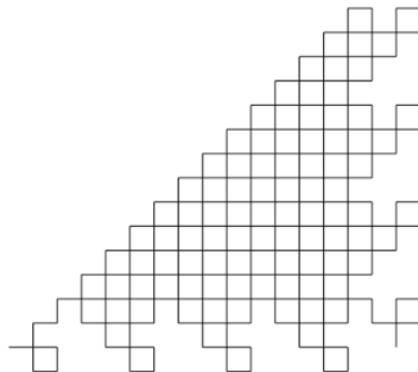
Beschreiben Sie in jedem Fall mit klaren Worten, was Sie untersucht haben und was Sie herausgefunden haben.

- Wählen Sie ein festes n ($= 1, 2, 3, 4, 5, \dots$)
Bei allen Verlaufsmustern, die Sie aus den Faltungen mit einem festen n herstellen können, ist der Abstand vom Ausgangspunkt zum Endpunkt immer gleich. Untersuchen Sie, warum das so ist.
Können Sie den Abstand auch in Abhängigkeit von n angeben?
Hinweis: der Abstand hängt natürlich von der Länge des Streifens, mit dem Sie arbeiten, ab. Daher ist es ratsam mit einem Streifen der Länge 2^n zu beginnen, denn dann haben die einzelnen Stücke die Länge 1.
- Wählen Sie eine feste Zahl. Setzen Sie den Ausgangspunkt auf einen festen Platz auf einem karierten Papier.
 - Wo liegen die möglichen Endpunkte eines Verlaufsmusters nach n Faltungen?
 - Kann es Punkte geben, die auf dem Weg vom Ausgangspunkt zum Endpunkt weiter vom Ausgangspunkt entfernt liegen als der Endpunkt? Untersuchen Sie welche Abstände überhaupt möglich sind.
 - Können Sie den maximalen Abstand eines Punktes im Verlaufsmuster zum Ausgangspunkt in Abhängigkeit von n angeben?

- Es gibt viele Verlaufsmuster bei denen sich die Knicke im Muster überlappen. Das bedeutet, dass Sie an einen Punkt zurückkommen, an dem Sie schon mal waren. Dies passiert, wenn RRR oder LLL im Verlaufsmuster vorkommt: nach drei Knicken nach rechts oder nach links sind Sie an der Ecke wieder angekommen. Für $n = 5$ hat jedes Verlaufsmuster mindestens eine Teilreihe LLL (das können Sie überprüfen).
 - Zeigen Sie, dass für jedes $n > 5$ jedes Verlaufsmuster mindestens eine Teilreihe LLL besitzt.
 - Begründen Sie, dass die Anzahl der Teilreihen LLL in jedem Verlaufsmuster bei größer werdendem n stets größer wird (in jedem Fall nicht kleiner).
- Schauen Sie sich unten stehende Figuren an: links sehen Sie ein Verlaufsmuster mit knicken von 90° , rechts das gleiche Muster mit etwas weniger als 90° . In der rechten Figur kann man deutlich sehen, dass es keine Überlappungen gibt: ein gerades Stück wird nie zweimal durchlaufen. Also wird $RRRR$ oder $LLLL$ in einem Verlaufsmuster nicht vorkommen.
 - Können Sie beweisen, dass $RRRR$ (oder $LLLL$) in einem Verlaufsmuster nicht möglich ist?
 - Wann erhalten Sie Berührungspunkte (gemeinsame Eckpunkte), die in einem Verlaufsmuster oft später auftreten, wie im hier dargestellten Beispiel?



- In einem Verlaufsmuster können Sie Symmetrien finden, wie im folgenden Bild. Das gilt für das gesamte Bild, aber auch für kleinere Teile innerhalb eines Bildes. Können Sie formulieren und begründen, wo die verschiedenen Symmetrien auftreten?



- Nehmen Sie von einem gegebenen Verlaufsmuster einen zusammenhängenden Block von 2^k Buchstaben von L und R. Solch ein Block von Buchstaben hat also die Länge $4, 8, 16, 32, \dots$ ($k \geq 2$). Zählen Sie nun in diesem Block wie oft L bzw. R vorkommt. Bilden Sie die Differenz dieser beiden Zahlen; es wird 0 oder 2 rauskommen.
 - Können Sie das beweisen?
 Die Differenz zwischen der Häufigkeit von R und L, in einem Block, nennen wir die Diskrepanz eines Blocks. Die vorherige Behauptung zeigt also, dass spezielle Blöcke der Länge 2^k die Diskrepanz 0 oder 2 haben.
 - Untersuchen Sie, was die maximale Diskrepanz in einem Verlaufsmuster, das zu n Faltungen gehört, ist und formulieren Sie eine Vermutung.

ENDE