

„Bewusst impfen“

Aufgaben der Vorrunde NRW für die 30.
Mathematik Olympiade

23. November 2018



Definition:

Um die Begriffe empfänglich, krank und immun genauer zu definieren, ergänzen wir:

- Unter den Begriff „empfänglich“ zählen gesunde Personen, die noch nicht von der Grippe infiziert waren.
- Unter den Begriff „krank“ zählt auch, dass Personen zwar noch keine Grippe Symptome bemerken, aber dennoch andere anstecken können.

Aufgabe 1:

Veranstaltungen	Fahrradtour	Fahrrad- tour	Training trinken								
	30. Sep	01. Okt	02. Okt	03. Okt	04. Okt	05. Okt	06. Okt	07. Okt	08. Okt	09. Okt	10. Okt
Tom	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
Monika	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Senta	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
Matthias	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
Ruud	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2
Jacques	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
Dede	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
Kim	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
Marcel	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
Eric	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Liesbeth	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Kranke Personen	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4	3

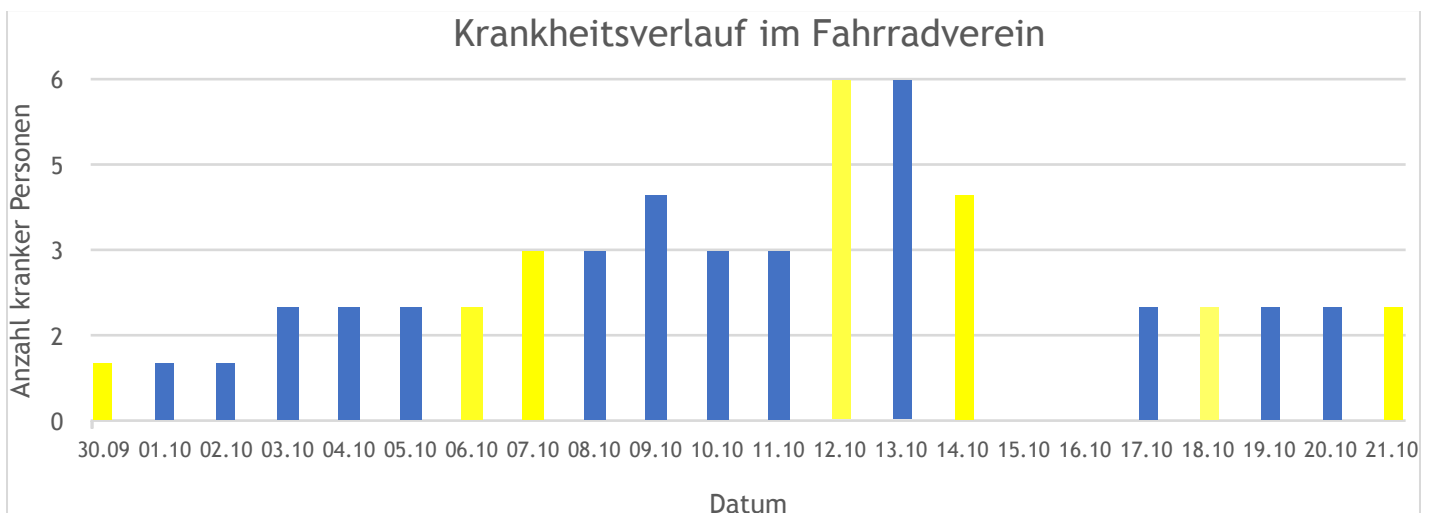
Veranstaltung
en

Fahrrad-
tour

Fahrrad-
tour

	11. Okt	12. Okt	13. Okt	14. Okt	15. Okt	16. Okt	17. Okt	18. Okt	19. Okt	20. Okt	21. Okt
Tom	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Monika	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Senta	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
Matthias	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
Ruud	2	2	2	2							3
Jacques											3
Dede		2	2	2							3
Kim		2	2	2							3
Marcel		2	2	2							3
Eric	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
Liesbeth	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
Kranke Personen	3	6	6	4	0	0	2	2	2	2	2

Um den Krankheitsverlauf anschaulich darstellen zu können, haben wir uns für eine Tabelle entschieden, bei der die 1, 2, 3 jeweils für empfänglich, krank und immun stehen. Weiße Felder zeigen unzureichende Informationen und wurden deshalb freigelassen.



Im Krankheitsverlauf über 22 Tage sehen wir, dass es mit nur einer Person beginnt, dann zur Mitte hin (12.-13. Oktober) mehr werden und am Ende. Die gelben Säulen zeigen jeweils die Sonntage an. Die Daten, die an diesen Tagen erhoben werden, sind mit höherer Wahrscheinlichkeit richtig, da bei einigen Personen der genaue Anfang und das Ende der Erkrankung nicht bekannt.

Aufgabe 2:

Es ist möglich, dass Monica am 30. September immun ist, jedoch lässt sich dies nicht genau sagen: Sie wird im gesamten Zeitraum vom 30. September bis zum 21. Oktober nicht krank; das sagt aber nicht aus, ob sie immun ist oder empfänglich ist, aber einfach nicht erkrankt. Um sicher sagen zu können, dass Monica immun ist, muss man nach Definition beweisen, dass sie nicht empfänglich ist.

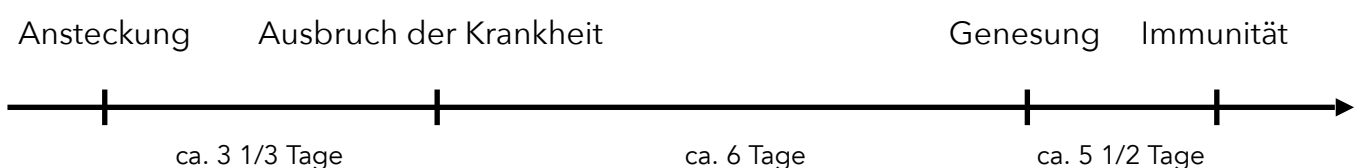
Da sich Matthias vor dem 3. Oktober, an dem er erste Grippe-symptome verspürte („sich nicht fit fühlt“), das letzte Mal am 30. September in Kontakt mit Vereinsmitgliedern, darunter der kranke Tom, befunden hat, muss er sich an diesem Tag angesteckt haben. Demnach liegen 3 Tage zwischen Ansteckung und Auftreten der ersten Grippe-symptome.

Nachdem Tom noch am 7. Oktober krank ist, ist er am 10. Oktober „wieder ganz der Alte“. Entweder ist er nun immun, dann lägen 4 Tage zwischen Abklingen der letzten Grippe-symptome und bestehender Ansteckungsgefahr, da er am 9. Oktober noch nicht ganz gesund ist, oder Tom ist noch krank, fühlt sich aber wieder gut. Das würde auch die Erkrankung von Marcel, da diese sich am 10. Oktober zusammen trafen, erklären; in diesem Fall würde Marcel bereits nach 2 Tagen erste Grippe-symptome verspüren und Tom erst sicher am 14. Oktober immun sein (also 7 Tage zwischen Abklingen der letzten Grippe-symptome und bestehender Ansteckungsgefahr).

Ist Tom am 10. Oktober bereits immun, müsste sich Marcel dann vermutlich am 7. Oktober von Ruud angesteckt haben, welche selber 2 Tage später Grippe-symptome verspürt und somit in den Rahmen von 2-3 Tagen zwischen Ansteckung und Auftreten der ersten Grippe-symptome fallen würde, und würde demnach 5 Tage krank sein bis er erste Grippe-symptome verspürt. Am 21. Oktober wäre Marcel dann sicher wieder gesund.

Aus diesen beschriebenen Zeiträumen ermittle ich nun Mittelwerte:

Der Zeitraum von der Ansteckung bis zum Auftreten der ersten Grippe-symptome beträgt $3 \frac{1}{3}$ Tage, der Zeitraum nach dem Abklingen der letzten Grippe-symptome bis bestehender Ansteckungsgefahr $5 \frac{1}{2}$ Tage.



Aufgabe 3:

Für das erste Szenario haben wir die Tabelle so ausgefüllt, dass wir jeden Tag die Nachbarn der Erkrankten mit dem Tag der Ansteckung markiert haben, so haben wir z.B. am ersten Tag des ersten Szenarios jeweils alle 4 Nachbarn der Kranken mit einer 1 markiert, usw..

4	3	2	3	4	5	6	7	8	9
3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	K	1	2	3	4	5	6	7
3	2	1	2	3	2	3	4	5	6
4	3	2	3	2	1	2	3	4	5
5	4	3	2	1	K	1	2	3	4
6	5	4	3	2	1	2	3	4	5
7	6	5	4	3	2	3	4	5	6
8	7	6	5	4	3	4	5	6	7
9	8	7	6	5	4	5	6	7	8

So haben wir herausgefunden, dass beim ersten Szenario mit 2 Kranken und 0 Immunen nach 9 Tagen alle weiteren Personen erkrankt sind. Es sind am Ende also 100 Kranke und 0 nicht erkrankte Personen.

4	3	2	I	4	5	6	7	8	I
3	I	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	K	1	2	3	4	5	6	7
3	2	1	2	3	4	5	4	5	6
I	3	2	3	I	I	I	3	4	5
5	4	I	2	1	K	1	2	3	4
6	5	4	3	2	1	2	3	4	5
7	6	5	4	3	2	3	4	I	6
8	7	6	5	4	3	4	5	6	7
I	8	7	6	5	4	5	6	7	8

Das gleiche System haben wir auch bei dem zweiten Szenario mit 2 Kranken und 9 Immunen angewandt und haben herausgefunden, dass dieses Mal, nach 8 Tagen alle

weiteren Personen erkrankt sind. Es sind am Ende also 90 Kranke und 10 Nicht-Kranke (alle mit Impfung).

I	I	I	I	I	I	I		I	I
I		I	I	I	I	I	I	I	I
I	I	K	1	I	I	I	I	I	I
I	I	I	I		I	I	I	I	I
I	I	I		I	1	I	I	I	I
I	I	I	I	I	K	I	I	I	I
	I	I	I	I	I	I	I		I
I	I	I	I	I	I		I	I	
I	I		I	I	I	I	I	I	I
I		I	I	I	I	I	I	I	I

Beim dritten Szenario stoppt die Verbreitung der Grippe schon nach einem Tag, da alle „Nachbarn,“ der bis dahin erkrankten, geimpft sind und somit nicht erkranken können. Es sind am Ende also 4 Kranke und 96 Nicht-Kranke (davon 86 mit Impfung).

Man sieht also, dass nicht unbedingt die gesamte Bevölkerung eine Impfungen erhalten muss, um eine große Anzahl von Personen vor einer Erkrankung zu schützen.

Aufgabe 4:

In dieser Aufgabe soll ermittelt werden, wie viel Impfstoff verwendet werden sollte, um einen möglichst großen Anteil der Bevölkerung zu schützen. Trotzdem soll der Impfstoff möglichst sparsam verwendet werden. Es handelt sich also um das Phänomen des indirekten Effekts, wie es in Aufgabe 5 heißt. Indirekt-Geschützte sind Leute, die nicht geimpft, also nicht immun sind, aber weil sie nicht mit Kranken in Berührung kommen, dennoch nicht krank werden, also geschützt sind.

Nach dem Diagramm aus Aufgabe 5 sollte der Anteil der Geimpften bei knapp 70% liegen, denn bei diesem Anteil ist der indirekte Effekt am höchsten. Man hat also dort die meisten nicht-geimpften Leute geschützt.

Nun gilt es aber zu gucken, wie man aus den bisherigen Aufgaben auf diesen Anteil kommt. Dazu sind die Tabellen aus Aufgabe 3 hilfreich. Sofort erkennbar ist, dass im ersten Szenario alle Personen früher oder später erkranken, da niemand geimpft ist. Auch beim zweiten Szenario, wo es anfangs wieder 2 Kranke gibt, gibt es keine Personen (außer die geimpften), die gesund bleiben. Der indirekte Anteil beträgt also in beiden Fällen 0%. Somit ist der Einsatz der Impfstoffe nicht sehr effektiv.

Im zweiten Szenario wäre es eine Möglichkeit, die Personen, die mit den kranken Personen in Berührung kommen, zu impfen. Somit würden die 8 jeweils benachbarten Personen genügen, um auch alle verbleibenden Personen zu schützen. 90% wären demnach indirekt geschützt. Diese Annahme ist allerdings sehr realitätsfern, da Krankheitserreger sich schnell, beispielsweise über Türklinen verbreiten. Es sind also nicht immer die Personen, mit denen direkter Kontakt besteht, die erkranken. Außerdem ist auch die Annahme, jede Person habe mit nur vier anderen Personen Kontakt, sehr unrealistisch.

Was man dennoch mitnehmen kann, ist, dass es sich lohnt bestimmte Risikogruppen besonders zu schützen. Leute die also durch ihren Beruf beispielsweise viel mit erkrankten Personen zu tun haben, haben ein höheres Risiko selbst krank zu werden. Insbesondere gilt es also diese Personen zu schützen.

Im dritten Szenario sind anfangs 86% der Personen geimpft. Anfangs sind wieder zwei Personen krank und am Ende 4. Bei insgesamt 100 Leuten sind also 10% indirekt geschützt. Impft man noch mehr Personen, sinkt der Anteil der indirekt Geschützten wieder rum.

Gehen wir nun aber von einem anderen Standpunkt aus. Es ist nicht bekannt, welche Personen krank sind und somit lässt sich keine Personengruppe bestimmen, die, wenn sie geimpft sind, eine Verbreitung verhindern. Man könnte nun mehrere Zufallsszenarien erstellen, die jeweils einen unterschiedlichen Anteil an geimpften haben. Man notiert nun den Anteil der Geimpften und den Anteil der indirekt Geschützten.

I	I			I					
						I			
I		K							I
				I			I		
	I		I						
					K			I	
I	I								
		I		I		I			
I		I			I			I	

Beispieltabelle für Impfanteil= 20%; indirekter Effekt = 3% (grüne Felder)

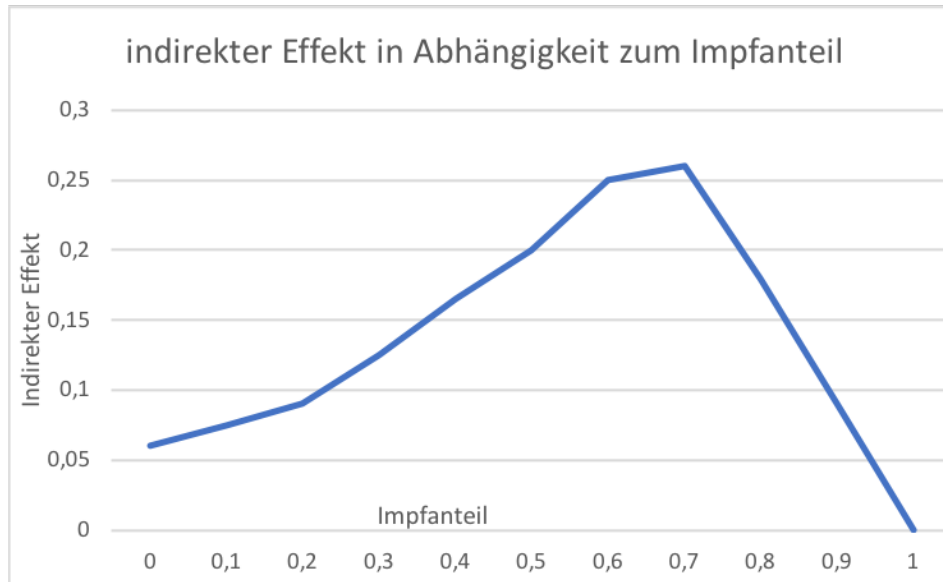
Fügt man nun weiterhin zufällig geimpfte Personen ergibt sich eine folgende Tabelle:

Anteil Geimpfter	Indirekter Effekt
0,2	0,03
0,3	0,06
0,4	0,12
0,5	0,16
0,6	0,25
0,7	0,31
0,8	0,26

Auch bei unserer Prognose konnten wir also errechnen, dass ein Anteil von 60%-80% , also ca. 70%, Geimpften optimal wäre. So könnte der Impfstoff am effektivsten verwendet werden.

Aufgabe 5:

Aufgabe war es einen Graphen zu erstellen, der den Anteil der geschützten Bevölkerung, also die Deckung, in Abhängigkeit zum Impfanteil zeigt.



Da gilt:

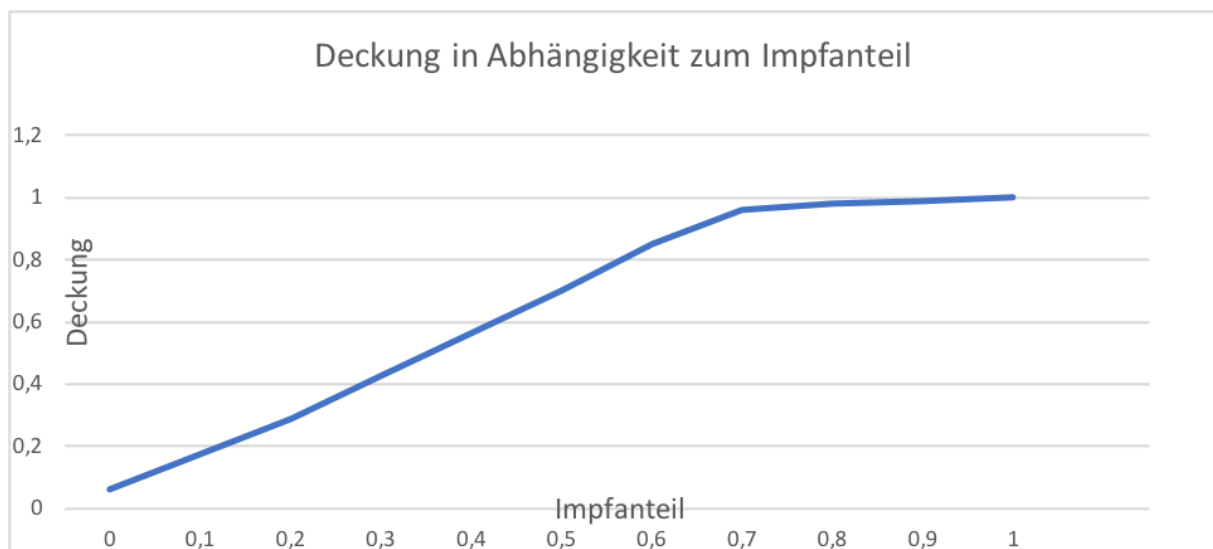
Deckung = Anteil der direkt geschützten Personen (Impfanteil) + Anteil der indirekt geschützten Personen,

haben wir die Werte des gegebenen Graphen abgelesen und diese in Excel eingetragen.

geimpft	indirekt geschützt
0	0,06
0,05	0,07
0,1	0,075
0,15	0,08
0,2	0,09
0,25	0,115
0,3	0,125
0,35	0,145
0,4	0,165

0,45	0,175
0,5	0,2
0,55	0,225
0,6	0,26
0,65	0,265
0,7	0,25
0,75	0,25
0,8	0,18
0,85	0,15
0,9	0,09
0,95	0,05
1	0

Mithilfe der oben genannten Formel konnte man einen Grafen erstellen, der die gewünschten Kriterien erfüllte.



Abschlussaufgabe

Teil 1:

a) + b)

Sehr geehrte Schulleiter, sehr geehrte Lehrer und Eltern, liebe SchülerInnen,

Es ist Grippezeit und um eine Grippeepedemie zu verhindern hat uns das Schulamt dazu angewiesen die, für die Schüler in Amberhavn vorgesehenen Impfdosen möglichst gerecht und gegen eine großflächige Epidemie schützend zu verteilen. Da in diesem Jahr der Impfstoff sehr knapp ist, stehen für die 7000 Schüler der drei weiterführenden Schulen nur 3000 Impfdosen zur Verfügung.

Neben dem direkten Effekt einer Impfung, also dem Immunisieren aller geimpften Personen, gibt es zusätzlich auch eine indirekte Wirkung. Das Immunisieren eines Teils der Schülerschaft führt dazu, dass auch ungeimpfte Schüler weniger Kontakt mit möglicherweise ansteckenden Mitschülern haben. So wird die Anzahl, der durch die Impfungen geschützten Personen, gesteigert.

Wir haben herausgefunden, dass ab einer Impfdichte von 70% der Anteil der durch Impfungen und durch den indirekten Effekt geschützten Personen nahezu konstant bleibt. Um jeweils 70% der Schüler einer Schule gegen Grippe zu impfen, wären insgesamt für alle drei Schulen 4500 Dosen Impfstoff notwendig.

Mit den vorhandenen 3000 Dosen können wir nur einen Teil der Schüler impfen. Die Verteilung der Impfungen lässt sich also wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} & \text{Anteil 1} * 1000 \text{ Schüler (Gesamtschule Amberhavn)} \\ + & \text{Anteil 2} * 2000 \text{ Schüler (Gymnasium Amberhavn)} \\ + & \text{Anteil 3} * 4000 \text{ Schüler (Realschule Amberhavn)} \\ = & 3000 \text{ Impfdosen} \end{aligned}$$

Es kam die Frage auf, ob eine gleichmäßiger prozentualer Anteil an geimpften Schülern aller drei Schulen oder ein ungleichmäßiger sinnvoller ist. Um diese Frage beantworten zu können wurden verschiedene Verteilungsmöglichkeiten simuliert. Zum systematischen Ausprobieren wurde eine Excel-Tabelle verwendet.

Schule1 → Gesamtschule (1000 SchülerInnen)

Schule2 → Gymnasium (2000 SchülerInnen)

Schule3 → Gymnasium (4000 SchülerInnen)

	geimpft (Anteil)	geimpft (absolut)	indirekt (Anteil)	indirekt (absolut)	geschützt
Schule1		0	0,06	60	60
Schule2		0	0,06	120	120
Schule3	0,75	3000	0,25	1000	4000
	Gesamt (Schule1+2)	0		gesamt	4180

Studien (Aufgabe 5) haben für verschiedene Impfanteile einen Anteil der indirekt geschützten Personen gefunden. Diese haben wir uns zum Vorbild genommen, um unsere Berechnungen durchzuführen.

Zum systematischen Ausprobieren mit unserem halbautomatischen Excelprogramm konnten wir viele verschiedene Möglichkeiten schnell simulieren.

Die verschiedenen Ergebnisse unterscheiden sich deshalb um +-70, da es Ungenauigkeiten beim Ablesen geben kann. Mit perfekt abgelesenen Werten würde dies auf +-0 sinken.

Um beispielhaft zu zeigen, wie unser Programm arbeitet nehmen wir folgende Situation an:

Schule 1	Schule 2	Schule 3	gesamt geschützt
0,7	0,7	0,225	4110
0,65	0,7	0,2375	4125
0,06	0,7	0,25	4220
0,55	0,7	0,2625	4185
0,7	0,65	0,25	4240
0,7	0,6	0,275	4230
0,7	0,55	0,3	4200
0,1	0,1	0,675	4285
0,1	0,15	0,65	4295
0,1	0,2	0,625	4295
0,1	0,25	0,6	4345
0,1	0,3	0,575	4225

20% der SchülerInnen der Gesamtschule, 40% der SchülerInnen des Gymnasiums und 50% der SchülerInnen der Realschule werden geimpft.

Ungleicher Anteil:

$$0,2 * 1000 + 0,4 * 2000 + 0,5 * 4000 = 3000 \text{ Impfdosen}$$

Mit indirekt geschützten Personen:

$$0,27 * 1000 + 0,565 * 2000 + 0,7 * 4000 = 4200 \text{ geschützte SchülerInnen}$$

Mit dem indirekten Effekt werden so 270 SchülerInnen der Gesamtschule, 1130 des Gymnasiums und 2800 der Realschule mit Sicherheit nicht an der Grippe erkranken.

Gleicher Anteil:

$$3000/7000 = 0,429$$

Bei gleichen Anteilen würde sich folgendes Bild ergeben:

$$0,429 * 1000 + 0,429 * 2000 + 0,429 * 4000 = 0,429 * 7000 \approx 3000 \text{ Impfdosen}$$

Mit indirekt geschützten Personen:

$$0,6 * 1000 + 0,6 * 2000 + 0,6 * 4000 = 0,6 * 7000 = 4200 \text{ geschützte SchülerInnen}$$

Mit dem indirekten Effekt würden 600 SchülerInnen der Gesamtschule, 1200 des Gymnasiums und 2400 der Realschule mit Sicherheit nicht erkranken.

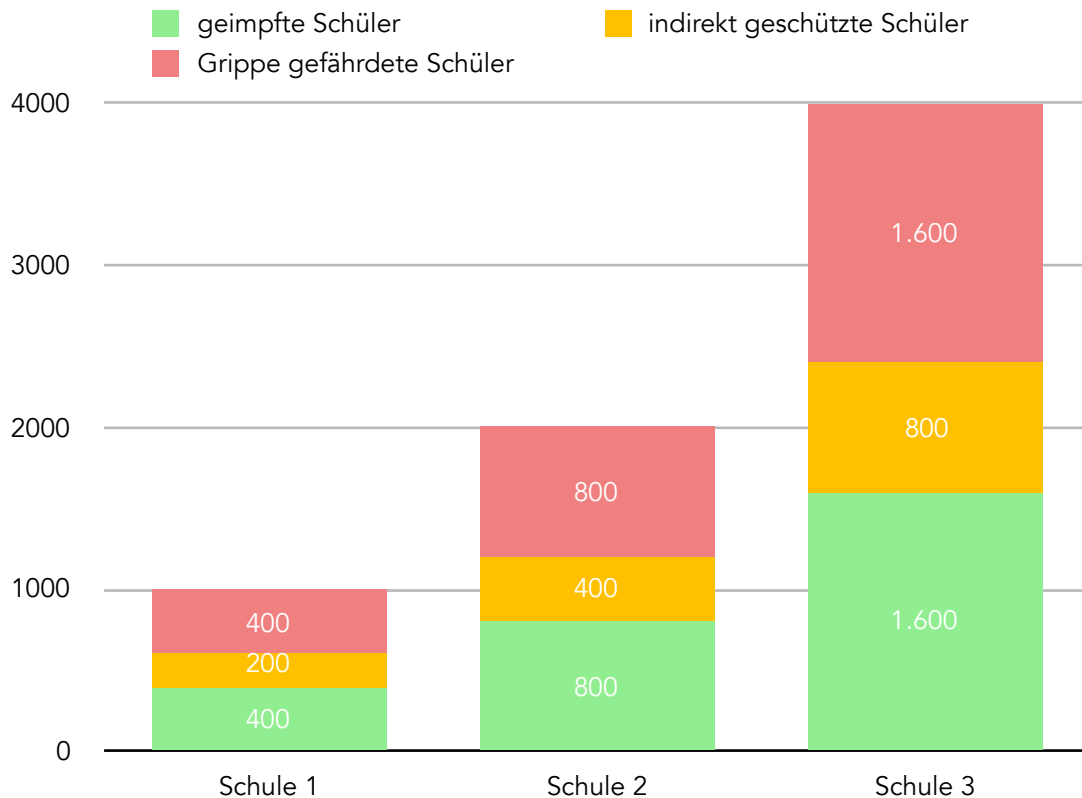
→ In beiden Fällen liegt die Zahl der von Grippe geschützten Personen bei 4200. Eine ungleiche Verteilung des Impfstoffes führt also zu keiner größeren Zahl von geschützten SchülerInnen und ist somit nicht effektiver.

Um Streitigkeiten zwischen den einzelnen Schulen zu vermeiden empfehlen wir eine anteilmäßig und gerechte Verteilung von:

$$0,429 * 1000 = 429 \text{ Impfdosen für die Gesamtschule Amberhavn}$$

$$0,429 * 2000 = 858 \text{ Impfdosen für das Gymnasium Amberhavn}$$

$$0,429 * 4000 = 1716 \text{ Impfdosen für die Realschule Amberhavn}$$



Wie das obere Diagramm zeigt, ist es auch mit dieser Verteilung an Impfstoffen nicht möglich, alle SchülerInnen vor der Grippeerkrankung zu schützen. Da infizierte Personen bereits am Tag vor Beginn der typischen Symptome ansteckend sein können, ist es umso wahrscheinlicher, dass ansteckende Schüler zur Schule kommen und so weitere Mitschüler erkranken. Auch wenige erkrankte SchülerInnen reichen aus, um viele der anderen nicht geimpften SchülerInnen anzustecken. Um dies zu verhindern, wäre es sinnvoll ab einer gewissen Anzahl an gemeldeten Grippefällen, den Eltern freizustellen, ob sie ihre nicht geimpften Kinder zur Schule schicken wollen.

Werden 400 der 1000 SchülerInnen, die die Gesamtschule Amberhavn besuchen, geimpft, bleiben etwa 600 ungeimpfte SchülerInnen übrig. Wenn sich unter dieser Gruppe beispielsweise zwei bereits infizierte SchülerInnen befinden, könnten diese, laut einem auf Untersuchungen beruhendem Modell, zusammen etwa 5-8 weitere SchülerInnen anstecken. Wenn diese wieder rum die gleiche Anzahl an Schülern anstecken würden, wären bereits nach zwei, drei Tagen etwa 15-30 der 600 ungeimpften SchülerInnen infiziert, die das Grippevirus möglicherweise weiter geben könnten.

Demnach lautet unsere Empfehlung bei etwa 30 grippeerkrankten Schülern an einer Schule den Eltern Bescheid zu geben, um den Ausbruch einer Grippeepidemie zu vermeiden.

Des Weiteren empfehlen wir allen SchülerInnen und LehrerInnen regelmäßiges Händewaschen und die Vermeidung von direktem Hautkontakt mit anderen Menschen. Betroffene sollten zu Hause bleiben und bei starken Symptomen einen Arzt aufsuchen.

Für Fragen und Anmerkungen stehen wir Ihnen selbstverständlich zur Verfügung. Erreichen können sie uns telefonisch unter 01000/ 435961 oder per E-Mail unter Expertenkommission.impfen@amberhavn.de.

Viele Grüße im Namen der Expertenkommission
Mechthild Theilmeier-Wahner

Teil 2:

Sehr geehrte Damen und Herren,

wir haben uns mit der optimalen Zu- und Verteilung von Impfstoffen beschäftigt und stellen ihnen hiermit empfehlend unsere Erarbeitungen vor.

Grundsätzlich gilt: „Je mehr Impfdosen verfügbar, desto weniger Erkrankungen treten auf.“, da der Deckungsgrad in Abhängigkeit von dem Impfanteil immer steigt.

Da aber keine genügende Anzahl an Impfdosen vorhanden ist, um die Bevölkerung eines ganzen Landes zu schützen, muss bei der Verteilung systematisch vorgegangen werden, um ein optimales Ergebnis zu erzielen.

Unterschiedlichen Bevölkerungsgruppen wie z.B. arme und reiche besitzen unterschiedliche Hygienestandards. Somit sind welche mit einem niedrigeren Hygienestandard anfälliger für Grippeviren, als welche mit einem höheren. Da in Europa die prozentuale Summe der Unterschicht und der Mittelschicht, teils auch nur der Unterschicht, größer ist als die der Oberschicht, wäre es sinnvoll unter diesen eine größere Menge Impfstoff zu verteilen.

Ebenso muss auch das Alter betrachtet werden, da dieses das Immunsystem und deren Abwehrkraft beeinflusst. So sind vor allem Säuglinge, Kleinkinder aber auch Senioren immunsystemgeschwächer und für die Grippe sehr anfällig. Bei Säuglingen und manchen Senioren kann Grippe tödlich enden, weshalb auch diese Altersgruppen vermehrt geimpft werden sollten.

Der Kontakt mit anderen Menschen ist auch ein Aspekt. Somit ist auch der Beruf entscheidend, wie z.B. Kindergärtner, Altenpfleger, Ärzte, welche vermehrt mit den oben beschriebenen Extremgruppen zu tun haben und so wahrscheinlicher angesteckt werden können. Aber auch der Kontakt zwischen den Menschen in deren Freizeit ist nicht zu vernachlässigen; insbesondere bezogen auf Sozial- und Altersgruppen. Dies sind bedeutsame Übertragungswege, auch zwischen benannten Gruppen.

Zusammenfassend kann man sagen, dass es drei Hauptaspekte gibt, die einen Einfluss auf die Verteilung der verfügbaren Impfdosen. Das sind:

- Hygienestandards der Personen
- Kontakte mit anderen Personen
- Alter der Personen

→ Es ist also unmöglich allgemeingültige Bedingungen zu verfassen, da man in jedem Fall, wie zum Beispiel den weiterführenden Schulen in Amberg-Heilbrunn, individuell entscheiden muss. Es gilt dabei Säuglinge, Senioren und Extremgruppen zuerst.

Mit freundlichen Grüßen im Namen der gesamten Expertenkommission

Mechthild Theilmeier-Wahner