

# Bewusst impfen



**Aufgabe der Vorrunde NRW  
für die 30. Mathematik Olympiade  
23. November 2018**

**macht mathe**  
internationale Mathematikwettbewerbe

## Impressum

Die Mathematik-Alympiade wird vom Freudenthal Institut, Universität Utrecht, ausgerichtet. Die Kommission der Alympiade ist für die Organisation des Wettbewerbs und die Erstellung der Aufgaben verantwortlich.

Die **Mitglieder der Kommission** sind:

**Dr. Ana Alboteanu-Schirner**

Gymnasium Schwertstraße, Solingen

**Tom Goris**

Fontys Lerarenopleiding, Tilburg

**Dédé de Haan**

Freudenthal Instituut, Utrecht & NHL Hogeschool, Leeuwarden

**Senta Haas**

Städtisches Gymnasium Hennef, Hennef, Deutschland

**Jacques Jansen**

Strabrecht College, Geldrop

**Kim Kaspers**

Murmellius Gymnasium, Alkmaar

**Johan van de Leur**

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

**Matthias Lippert**

Röntgen-Gymnasium, Remscheid, Deutschland

**Ruud Stolwijk**

CITO, Arnhem & Vrijeschool Zutphen VO

**Monica Wijers**

Freudenthal Instituut, Utrecht

**Sekretariat:**

Liesbeth Walther und Mariozee Wintermans

Freudenthal Instituut, Utrecht

Die Alympiade wird **unterstützt** durch:

- Das Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen
- Den Landesverband Mathematikwettbewerbe in Nordrhein-Westfalen
- Die Universitäten zu Bonn und zu Münster

## Hinweise für die Teams zu den Aufgaben der Vorrunde 2018/2019

Liebe Schülerinnen und Schüler,

ihr beteiligt euch heute an einem anspruchsvollen und spannenden Wettbewerb, der konzentriertes, gut strukturiertes und teamorientiertes Arbeiten von euch verlangt. Diese Aufgabe der Mathematik-Alympiade besteht aus zwei Teilen:

- Teil 1: Einstieg in das Thema (Einführungsaufgaben 1 – 4)
- Teil 2: Mittelteil (Aufgabe 5)
- Teil 3: Anwendung (Abschlussaufgaben Teil 1 und 2)

Die Aufgaben 1-5 bilden die Vorarbeit für Teil 3: Alle hierbei erzielten Ergebnisse und Einsichten sind erforderlich, um die Abschlussaufgabe erfolgreich bearbeiten zu können.

### Die folgenden Hinweise solltet ihr unbedingt beachten:

- Lest zunächst den ganzen Aufgabentext gründlich durch, so dass ihr einen Überblick über die zu bearbeitenden Aufgaben bekommt.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben habt ihr 7 Stunden Zeit. Plant unbedingt genügend Zeit (ca. 3 Stunden) für die Abschlussaufgabe ein. Auch das Ausformulieren und Aufschreiben der Lösungen kostet viel Zeit.
- Wenn ihr arbeitsteilig arbeitet, dann stellt einander eure Teilergebnisse zu den Voruntersuchungen vor, bevor ihr mit der Abschlussaufgabe beginnt.
- Gebt immer an, wenn ihr bestimmte Annahmen macht und begründet diese sinnvoll.
- Bei manchen Aufgaben kann es sinnvoll sein, zunächst konkrete Beispiele durchzurechnen, um die Aufgabe besser zu durchdringen.
- Wenn ihr während der Bearbeitung der Aufgaben bestimmte Methoden oder Vorgehensweisen aus vorherigen Aufgaben abändert, beschreibt dann in eurer Ausarbeitung diese Anpassungen und begründet diese auch.
- Ihr dürft für die Bearbeitung der Aufgaben Bücher und das Internet benutzen. Es kann sinnvoll sein, Excel oder eine andere Tabellenkalkulation zu verwenden.

### Bestandteile eurer Ausarbeitung:

- die Ausarbeitung der beiden Abschlussaufgaben
- die Ausarbeitungen zu den Aufgaben 1 bis 5 als Anlage

**Die beurteilenden Lehrerinnen und Lehrer erhalten eure Arbeit in digitaler Form als pdf-Dokument. Achtet bitte insbesondere darauf, die Arbeit als ein Gesamtdokument (bitte nicht in mehrere Dateien aufgeteilt) abzugeben. Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu gewährleisten, erwähnt bitte eure Namen und den Namen der Schule nicht in eurer Arbeit.**

### Wesentliche Beurteilungskriterien sind:

- Lesbarkeit und Verständlichkeit des Auftrages
- Vollständigkeit der Arbeit
- kreativer, sinnvoller, richtiger und geschickter Einsatz von Mathematik
- schlüssige Argumentationen und sinnvolle Begründungen von getroffenen Entscheidungen (Hierbei kann Realitätsbezug von Bedeutung sein.)
- Tiefgang der Arbeit: Wie gründlich wurden die einzelnen Punkte ausgearbeitet?
- Gestaltung der Arbeit: Form, Struktur, Sprache, Gebrauch und Funktion der Anlagen, Einsatz von Diagrammen, Tabellen, Zeichnungen, usw.

Viel Spaß und Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgabe!

## Einleitung

Im Laufe der Jahrhunderte haben Infektionskrankheiten Millionen von Menschen das Leben gekostet. Auch eine scheinbar harmlose Krankheit wie die Grippe forderte im 20. Jahrhundert noch viele Opfer: In der Zeit von 1918 bis 1920 starben weltweit sogar mehr Menschen an den Folgen der Spanische Grippe als in der Zeit von 1914 bis 1918 durch den 1. Weltkrieg.

In den vergangenen Monaten sind immer wieder Berichte über Todesfälle durch Hirnhautentzündung (Meningitis), Masern oder Röteln in den Medien. Oftmals sind Impfungen die effektivste Methode, um eine Epidemie zu verhindern.

Bei einer Impfung wird einem der betreffende Virus in stark abgeschwächter Form injiziert. Dadurch entwickeln sich Antikörper gegen diese Krankheit. Wenn man dann mit dem echten, deutlich stärkeren Virus in Kontakt kommt, ist der Körper bereits immun dagegen und kann nicht erkranken.

Es kommt aber regelmäßig zum Problem, dass bei einem unerwarteten Ausbruch einer Krankheit nicht immer ausreichend Impfstoff zur Verfügung steht, um die gesamte Bevölkerung zu versorgen. Es stellt sich dann die Frage, welche Bevölkerungsgruppen (in welcher Anzahl) am besten geimpft werden sollen, um ein optimales Ergebnis zu erzielen. In dieser Aufgabe geht es um genau diese Entscheidungen, also die bewusste Zuteilung von Impfstoffen.

Erst sollt ihr erkunden, wie sich eine Grippeepidemie entwickeln kann, anschließend sollt ihr untersuchen, wie man durch Impfung einer kleinen Bevölkerungsgruppe eine Epidemie verhindern kann.

Es ist notwendig, in dieser Aufgabe die folgenden Begriffe zu definieren und klar voneinander abzutrennen:

- Jemand ist **empfänglich (E)**, wenn er oder sie durch das Grippevirus angesteckt werden kann.
- Jemand ist **krank (K)**, wenn er oder sie die Grippe hat und auch andere anstecken kann.
- Jemand ist **immun (I)**, wenn er oder sie nicht (mehr) empfänglich für das Grippevirus ist. Dies ist entweder dann der Fall, wenn man geimpft wurde oder wenn man selbst schon die Grippe gehabt hat.

**Wir gehen davon aus, dass jede Person immer genau in eine dieser Kategorien fällt.**

## **Einstiegsaufgaben - Teil A**

*Tom ist Mitglied eines Fahrradvereins mit insgesamt 25 Fahrradliebhabern, die jeden Sonntag (manchmal auch an anderen Tagen) eine Tour fahren, an der immer möglichst viele Mitglieder des Vereins teilnehmen. Am Montag, den 1.10., wird Tom krank: Die Grippe hat ihn erwischt. Am Vortag war er eigentlich auch schon krank, aber er wollte trotzdem mitfahren. An jenem Sonntag (30. September) ist er mit Monica, Senta und Matthias unterwegs gewesen. Am Donnerstag, den 4. Oktober, teilt Matthias Tom mit, dass auch er Grippe bekommen hat, während er am Abend zuvor – als er sich auch schon nicht fit fühlte – mit Ruud und Jacques eine kleine Trainingsrunde absolviert hat.*

*Am Sonntag, den 7. Oktober, unternehmen Ruud, Jacques, Dédé und Kim zusammen eine Fahrradtour. Tom, Senta und Matthias sind noch krank, die restlichen Vereinsmitglieder sind anwesend und fahren mit. Zwei Tage später ist Tom schon fast wieder gesund, aber inzwischen liegt Ruud mit Grippe im Bett.*

*Einen Tag später, am Mittwoch, den 10. Oktober, ist Tom wieder ganz der Alte. Dédé und Kim beschließen, an diesem Abend mit allen, die möchten, eine Extra-Trainingsrunde zu fahren. Tom und Marcel verabreden sich, um abends einen trinken zu gehen. Zwei Tage später hat Marcel die Grippe erwischt – genauso wie die restlichen Teilnehmer der Gruppe, die am Mittwoch mitgefahren sind ...*

*Am Sonntag, den 14. Oktober, unternehmen Tom, Monica, Senta, Matthias und noch vier andere Mitglieder des Vereins eine Radtour. Die restlichen Vereinsmitglieder sind noch durch die Grippe außer Gefecht gesetzt. Eine Woche später findet sich endlich wieder eine größere Gruppe zu einer Tour zusammen: Bis auf Eric und Liesbeth sind alle wieder von der Grippe genesen und können mitfahren.*

### **Aufgabe 1**

Im Nachhinein kann man erkennen, dass der ganze Verein nicht von der Grippe heimgesucht worden wäre, wenn Tom eine Grippeimpfung gehabt hätte – aber hinterher ist man immer klüger.

Veranschaulicht den Verlauf der Grippewelle innerhalb des Fahrradvereins in geeigneter Weise.

### **Aufgabe 2**

Untersucht aufgrund der obenstehenden Erzählung, ob es im Fahrradverein Mitglieder gibt, die am 30. September immun waren. Ermittelt auf Grund der gegebenen Daten, wie lang der Zeitraum von der Ansteckung bis zum Auftreten der ersten Grippesymptome ist bzw. wie lange nach dem Abklingen der letzten Grippesymptome noch Ansteckungsgefahr besteht.

## Einstiegsaufgaben - Teil B

Unten seht ihr drei schematische Darstellungen von Szenarien einer Gruppe mit 100 Personen, von denen je zwei die Grippe haben. Diese sind mit "K" markiert. Geimpfte Personen – also solche, die immun sind – sind mit einem "I" gekennzeichnet. Die restlichen Personen (leere Felder) sind empfänglich. Wir nehmen an, dass jede Person an jedem Tag direkten Kontakt mit seinen "direkten Nachbarn", d.h. mit maximal vier Personen pro Tag hat. (Diagonale Felder sind keine direkten Nachbarn.)

**Bemerkung: Diese Schemata findet ihr auch in jeweils dreifacher Ausfertigung im Anhang.**

### Aufgabe 3

Untersucht bei jedem Szenario, nach wie vielen Tagen alle Personen krank sein werden - sofern sie erkranken können.

		K							
						K			

Szenario 1

			I						I
	I								
		K							
I					I	I	I		
		I				K			
								I	
I									

Szenario 2

I	I	I	I	I	I	I		I	I
I		I	I	I	I	I	I	I	I
I	I	K		I	I	I	I	I	I
I	I	I	I		I	I	I	I	I
I	I	I		I		I	I	I	I
I	I	I	I	I	K	I	I	I	I
	I	I	I	I	I	I	I		I
I	I	I	I	I	I		I	I	
I	I		I	I	I	I	I	I	I
I		I	I	I	I	I	I	I	I

Szenario 3

## Aufgabe 4

In dieser Aufgabe sollt ihr erkunden, wie der Impfstoff möglichst effizient eingesetzt werden kann: Der Impfstoff soll also möglichst sparsam eingesetzt werden, aber die Zahl der erkrankten Personen soll so gering wie möglich bleiben.

Ermittelt den prozentualen Anteil von geimpften Personen, den ihr unter der Voraussetzung, dass der Impfstoff möglichst sparsam verwendet wird, für optimal haltet. Begründet euren Lösungsweg. Benutzt dabei ein oder mehrere Schemata wie in der letzten Aufgabe.

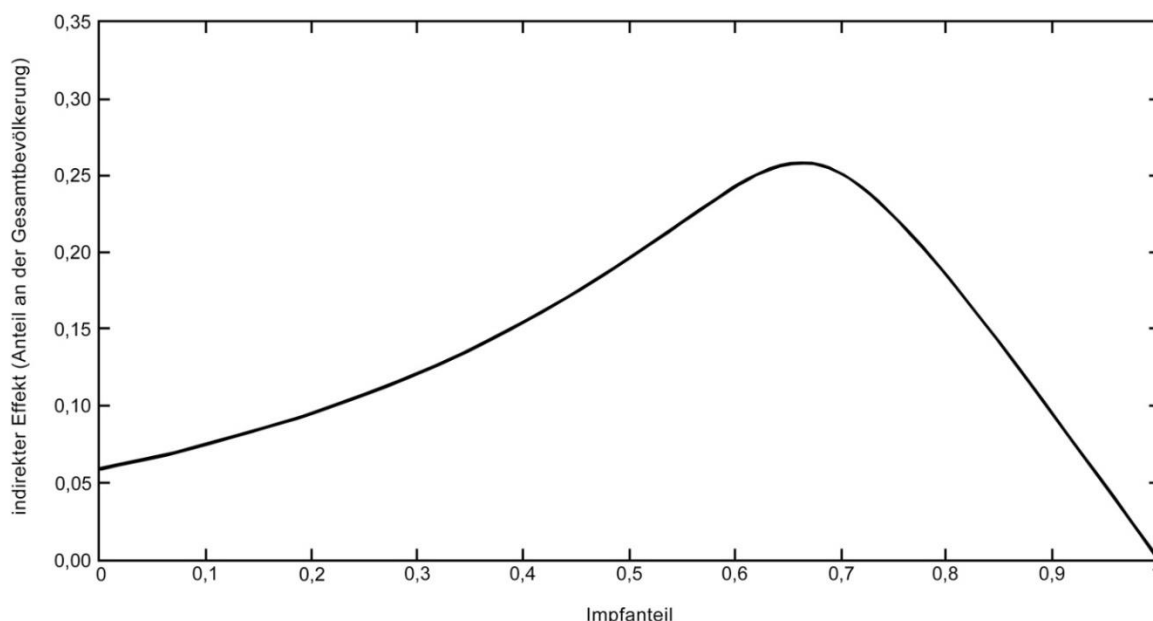
Betrachtet auch Situationen, in denen sich die Personen "frei bewegen" und dadurch auch zu anderen Personen Kontakt haben. Geht z.B. davon aus, dass jede Person jeden Tag vier andere "Nachbarn" hat.

## Mittelteil - Aufgabe 5

In den Einstiegsaufgaben habt ihr erkannt, dass es nicht nötig ist, jeden zu impfen, wenn man erreichen möchte, dass "nicht allzu viele" Menschen Grippe bekommen. Was genau mit "nicht allzu viele" gemeint ist, soll jetzt noch nicht präzisiert werden. Es soll aber schon eine Rolle spielen, wie viele Menschen geimpft werden.

Wir gehen nun davon aus, dass eine Grippeimpfung in jedem Fall dafür sorgt, dass man keine Grippe bekommt, dass man also **immun** (I) ist. Dies nennen wir den **direkten Effekt** einer Impfung. Daneben hat eine Impfung auch noch einen **indirekten Effekt**, der mit dem Begriff der "Gruppenimmunität" zu tun hat. Dies ist der Anteil der Personengruppe, die ohne Impfung nicht erkrankt, bezogen auf die Gesamtgruppe. Durch Impfungen wird der Teil der Bevölkerung, der nicht geimpft ist, von geimpften Menschen umgeben, die immun sind. Nicht geimpfte Personen kommen dadurch nicht so schnell in Kontakt mit erkrankten Menschen und haben dadurch selbst ein geringeres Risiko zu erkranken. Diesen Mechanismus nennen wir **Gruppenimmunität**.

Untersuchungen zeigen, dass der indirekte Effekt vom Anteil der Bevölkerung, der geimpft ist (dem sog. Impfanteil), abhängt. Dies kann man im folgenden Graphen erkennen (**Diesen Graphen findet ihr auch vergrößert im Anhang**):



Dem Graphen kann man z.B. entnehmen, dass bei einer Impfung der Hälfte der Bevölkerung ( $f = 0,5$ ) der indirekte Effekt ungefähr 0,20 beträgt und dadurch insgesamt fast 70 % der Bevölkerung **geschützt** ist.

Hierzu ein Kommentar des Wissenschaftlers Roel Coutinho, Virologe und Direktor des Zentrums für Infektionskrankheiten: *“Durch Impfung schützt man sich nicht nur selbst, sondern auch seine Mitmenschen. Wenn der Deckungsgrad eine kritische Grenze unterschreitet, gerät die gesamte Bevölkerung in Gefahr. Das kann man in England beobachten, wo der Deckungsgrad gegen Masern unter 80 % gesunken ist. Dort breitet sich die Krankheit nun wieder aus.”*

Mit Hilfe des obenstehenden Diagramms sollt ihr nun selbst einen Graphen erstellen, in dem der Anteil der geschützten Bevölkerung in Abhängigkeit vom Impfanteil dargestellt ist.

Untersucht, bei welchen Impfanteilen die **Deckung** (d.h. der Anteil der geschützten Personen an der Gesamtbevölkerung) für Grippe unter 80 % sinkt.



## Abschlussaufgabe

### Teil 1

Die drei weiterführenden Schulen von Amherst werden von 1000, 2000 bzw. 4000 Schülern besucht. Die zuständige Schulbehörde möchte die Schüler möglichst gut gegen Grippe schützen. Allerdings steht nur eine begrenzte Menge an Impfstoff zur Verfügung: insgesamt 3000 Dosen. Das Schulamt steht nun vor der Aufgabe, diesen Impfstoff so unter den Schulen zu verteilen, dass möglichst wenig Schüler an Grippe erkranken.

- a) Dieses Problem wird euch – in der Rolle einer Expertenkommission – vorgelegt. Untersucht, welche Auswirkungen verschiedene Verteilungen des Impfstoffs haben und formuliert aufgrund eurer Ergebnisse eine gut begründete Empfehlung. Verdeutlicht eure Vorschläge z.B. mit Hilfe von Diagrammen, Graphen und Tabellen.

Ihr könnt dabei voraussetzen, dass innerhalb jeder Schule die Schüler alle miteinander in Kontakt kommen, dass aber so gut wie kein Kontakt zwischen Schülern verschiedener Schulen besteht.

- b) Wenn der Impfstoff optimal zum Einsatz gekommen ist, dann kann man verhindern, dass im Falle von nur wenigen Grippeerkrankungen alle anderen nicht geimpften Personen in der Schule erkranken. Diese Gefahr besteht durchaus, wenn die Zahl der Erkrankten zu groß wird. Legt fest, ab welcher Anzahl von Grippefällen die nicht geimpften Personen die Empfehlung erhalten, die Schule nicht zu besuchen und begründet eure Festlegung.

### Teil 2

Im 1. Teil habt ihr in einer speziellen Situation untersucht, wie eine beschränkte Anzahl an Impfdosen möglichst gut unter den Schülern dreier Schulen verteilt werden kann. In der Aufgabe war vorausgesetzt, dass die Schüler innerhalb der Schule viel Kontakt untereinander haben, aber kaum Kontakt zu Schülern anderer Schulen. Dies kann man auch auf allgemeine Bevölkerungsgruppen übertragen, die viel oder eher wenig Kontakt miteinander haben. Dann ist es nicht das Schulamt, welches die begrenzte Anzahl an Impfdosen verteilen muss, sondern z.B. das Gesundheitsamt. Vielleicht ist auch die Menge an Impfstoff verhältnismäßig kleiner oder größer als im 1. Teil der Aufgabe oder man muss mehrere verschiedene Gruppen betrachten. Die Situation wird in jedem Fall komplexer und kann nicht mehr so einfach durchgerechnet werden.

In diesem letzten Teil der Aufgabe sollt ihr den Einfluss dieser Aspekte auf die optimale Verteilung der verfügbaren Impfdosen untersuchen. Eure Ergebnisse sollen zu einer Empfehlung für das Gesundheitsamt führen, wie allgemein bei der Zuteilung von Impfstoff an Bevölkerungsgruppen vorgegangen werden soll.

**Tipp:** Variiert zunächst nur die Anzahl der verfügbaren Impfdosen. Untersucht z.B. die Situation mit 1000, 2000 und 4000 Dosen (während ihr die Gruppengröße aus Teil 1 beibehaltet). Untersucht erst danach die Auswirkungen durch Änderungen an den Randbedingungen.

**Anlage zu Aufgabe 3 Szenario 1**

		K							
					K				

*Szenario 1*

		K							
					K				

*Szenario 1*

		K							
					K				

*Szenario 1*

**Anlage zu Aufgabe 3 Szenario 2**

			I						I
	I								
		K							
I				I	I	I			
		I			K				
								I	
I									

Szenario 2

			I						I
	I								
		K							
I				I	I	I			
		I			K				
								I	
I									

Szenario 2

			I						I
	I								
		K							
I				I	I	I			
		I			K				
								I	
I									

Szenario 2

### Anlage zu Aufgabe 3 Szenario 3

		Z							
					Z				

Szenario 3

		Z							
					Z				

Szenario 3

		Z							
					Z				

Szenario 3

## Anlage zu Aufgabe 5

