

Reagiert der Körper?

Umgang mit zensierten Daten

Mathematik Alympiade

Vorrunde

28. November 2003



Zuvor noch einige Hinweise:

Wie soll die Aufgabe bearbeitet werden?

Die Vorrunde der Mathematik Alympiade 2003/04 besteht aus 2 einführenden Aufgaben und einer abschließenden Aufgabe.

Allgemeine Hinweise

- Lesen Sie zunächst die Aufgabe vollständig durch, damit Sie erfassen können, welche Arbeiten getan werden müssen.
- Verweilen Sie nicht zu lange bei den einführenden Aufgaben. Verteilen Sie, wo es geht, die Aufgaben auf die Teammitglieder. Überlegen Sie, wo es nötig ist.
- Wenn die Aufgaben im Team verteilt, dann besprechen Sie, bevor Sie die abschließende Aufgabe bearbeiten, die Ergebnisse der einführenden Aufgaben untereinander.
- Bei der abschließenden Aufgabe ist es wichtig, dass Sie Ihre Empfehlungen gut untermauert klarmachen und begründen. Dies ist ein wichtiger Aspekt in der Beurteilung.
- Versichern Sie sich, dass Ihr Ergebnis eine wirkliche Empfehlung darstellt, die jeden erfragten Aspekt einschließt. Stellen Sie sicher, dass alle Ideen und Details aus den einführenden Aufgaben in die Empfehlungen bei der abschließenden Aufgabe eingebunden sind.

Was müssen Sie abgeben?

Sie geben eine umfassende Empfehlung ab – das Ergebnis der abschließenden Aufgabe –, lesbar und für den Adressaten verständlich, unabhängig von den einführenden Aufgaben. Die Lösung der einführenden Aufgaben kann als Anhang beigelegt werden.

Benutzen Sie bitte schwarze Tinte oder drucken Sie in schwarz: die Antworten müssen kopiert werden.

Bewertung

Bei der Bewertung Ihrer Arbeit werden die folgenden Aspekte berücksichtigt:

- die Klarheit der beschriebenen Empfehlung, die Argumentation und das ausgearbeitete Beispiel
- der Gebrauch der Mathematik
- die Qualität der Gedankenführung und die Begründung Ihrer jeweiligen Entscheidungen
- die Realitätsnähe ihrer Lösung
- die Tiefe Ihrer Ausarbeitung
- die Lesbarkeit, der Aufbau, die Art der Darstellung, die Form: ist es wirklich eine Empfehlung?

Viel Spaß bei der Arbeit und gutes Gelingen!

Reagiert der Körper?

Dr. Arno Schmitt hat sich auf die Transplantation von Nieren spezialisiert. Schon lange ist bekannt, dass in manchen Fällen die Ersatzniere vom Körper akzeptiert wird, in manchen Fällen aber auch abgestoßen wird, was für den Empfänger der Niere lebensbedrohlich ist. Um eine Abstoßung zu verhindern, gibt Dr. Schmitt seinen Patienten ein bestimmtes Medikament, das sie regelmäßig einnehmen müssen. Ebenso verfährt man in fünf weiteren großen Krankenhäusern.

Dr. Schmitt ist Leiter des Versuches, in dem die Wirkung des Medikaments, das erst seit 10 Jahren verfügbar ist, bei einer großen Zahl von Patienten und über lange Zeit untersucht wird. In dem Krankenhaus, in welchem ein Nierenpatient operiert wird, wird er auch nach der Operation weiter beobachtet und immer wieder untersucht.

Die beobachtete Patientengruppe bestand während der 10 Jahre der Untersuchung nicht aus einer konstanten Anzahl: einige der Patienten starben ganz unabhängig von der Nierenoperation, z.B. durch Unfälle, einige kamen nicht mehr zu Nachuntersuchungen ins Krankenhaus, ohne dass dafür Gründe bekannt wurden; (sie zogen z.B. in eine andere Stadt, ohne sich abzumelden).

In der medizinischen Wissenschaft wird der Erfolg eines Versuches gemessen durch die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines bestimmten Ereignisses (hier die Abstoßung der Niere, oder umgekehrt das weitere Funktionieren der Niere) nach einer bestimmten Zeitspanne. In der Tabelle unten sind Daten aus der Studie von Dr. Schmitt wiedergegeben. Die Abstoßung eines fremden Organs ist lebensgefährlich, viele Patienten überleben dieses Ereignis nicht. Ein Patient, bei dem das Medikament die Abstoßung nicht verhinderte, wird (selbst wenn er überlebt) danach nicht mehr mit demselben Medikament behandelt und wird daher nach der Abstoßung nicht mehr in der Studie weiter verfolgt.

Wegen des vorzeitigen Ausscheidens von Patienten aus der Studie sind die Daten nicht vollständig verfügbar. In der Statistik nennt man solche unvollständigen Datenmengen „zensierte Daten“. Die Gruppe der Leute, deren Spur wir verloren haben, nennen wir „Aussteiger“. Zu den Aussteigern zählen also nicht die Patienten, deren Körper das Organ abgestoßen hat.

Jahre seit Beginn der Studie	Zahl der Patienten in der Studie (seit Beginn des Jahres)	Zahl der Patienten mit Abstoßung in der Studie (während des Jahres)	Zahl der Aussteiger(während des Jahres)
[0,1> = das erste Jahr	138	9	14
[1,2>	115	7	10
[2,3>	98	7	5
[3,4>	86	5	8
[4,5>	73	4	11
[5,6>	58	3	16
[6,7>	39	2	9
[7,8>	28	1	15
[8,9>	12	1	2
[9,10>	9	0	5

Trotz der Tatsache, dass Dr. Schmitt mit zensierten Daten arbeiten muss, möchte er in der Lage sein, verlässliche Voraussagen über den Prozentsatz derjenigen zu machen, die die nächsten 5 Jahre ohne Abstoßungsreaktion überdauern, bei denen die Niere also weiterhin funktioniert. Die dazu gehörende Wahrscheinlichkeit wollen wir „**Funktionierenswahrscheinlichkeit**“ nennen.

Aufgabe 1

Viele Spezialisten nutzen die folgende Methode:

„Um ein Maß für die Funktionierenswahrscheinlichkeit nach z.B. 5 Jahren zu erhalten, betrachtet man die ersten 5 Jahre der Studie und setzt für diesen Zeitraum die Zahl der Patienten ohne Abstoßung in Beziehung zu der Zahl Teilnehmer, die über den gesamten Zeitraum der 5 Jahre erfasst waren. Man berücksichtigt also nicht diejenigen, die in diesen 5 Jahren ausgestiegen sind. (Wenn wir das für die ersten 5 Jahre durchrechnen, erhalten wir als Funktionierenswahrscheinlichkeit nach den ersten 5 Jahren 64%.)“

Es gibt noch viel mehr Möglichkeiten, die Überlebenswahrscheinlichkeit zu bestimmen. So besagt eine weitere Methode:

„Die Gruppe der Personen, die in den 10 Jahren aus der Studie aussteigt, darf insgesamt in der Untersuchung nicht mitgewertet werden. Die lässt man daher ganz weg. Von der verbliebenen Gruppe berechnet man den prozentualen Anteil derjenigen, bei denen innerhalb von 5 Jahren die Niere abgestoßen wurde. Die Gegenwahrscheinlichkeit dazu ist die Funktionierenswahrscheinlichkeit. (Sie beträgt in unserem Fall 26%.)“

Entwerfen Sie mindestens 2 weitere Methoden, die genutzt werden könnten. Notieren Sie die zugehörige Funktionierenswahrscheinlichkeit einschließlich der Berechnung. Teilen Sie mit, welche Methode Ihnen am zuverlässigsten erscheint und warum.

Aufgabe 2

Um ein besseres Gefühl für die Zuverlässigkeit der Methoden aus Aufgabe 1 zu bekommen, betrachten wir eine Menge unzensurierter Daten, will sagen: es gibt keine Aussteiger. Die Werte in dieser Tabelle haben nichts mit der ersten Tabelle zu tun; sie sind nur zu Übungszwecken zusammengestellt worden.

Jahre seit Beginn der Studie	Zahl der lebenden Patienten in der Studie (seit Beginn des Jahres)	Zahl der Patienten mit Abstoßungen in der Studie (während des Jahres)
[0,1>	120	27
[1,2>	93	18
[2,3>	75	21
[3,4>	54	9
[4,5>	45	4
[5,6>	41	5
[6,7>	36	3
[7,8>	33	3
[8,9>	30	2
[9,10>	28	2

a) Berechnen Sie die Funktionierenswahrscheinlichkeit nach einem Jahr der Studie, nach zwei Jahren, usw.

Präsentieren Sie Ihre Ergebnisse auf geeignete Weise.

Für unzensierte Daten kennen wir die genauen Wahrscheinlichkeiten. Für zensierte Daten werden wir sie niemals genau kennen. Aber wir können sie schätzen. Die Verlässlichkeit der Schätzung hängt von der Art ab, wie wir die Zahl der Aussteiger behandeln. Wir werden an Hand der gegebenen unzensierten Daten unterschiedliche Vorgehensweisen im Umgang mit den Zahlen der aussteigenden Patienten daraufhin untersuchen, welche Auswirkungen sie auf die Funktionierenswahrscheinlichkeit haben, wenn wir es mit zensierten Daten zu tun haben.

b) Verändern Sie die unzensierten Daten der obigen Tabelle so, dass eine zensierte Datenmenge entsteht. Tun Sie das auf mindestens 3 Arten. Jede alternative zensierte Datenmenge soll mit 120 Patienten zu Beginn der Studie starten. Legen Sie Ihre eigenen Zahlen an Aussteigern fest. Erklären und begründen Sie die Art und Weise Ihres Vorgehens.

c) Wenden Sie die Methoden aus Aufgabe 1 auf jede Ihrer 3 zensierten Datenmengen an, um die Überlebenswahrscheinlichkeit nach 5 Jahren heraus zu bekommen und vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 2a. Überlegen Sie, welche Ursachen den Unterschieden zugrunde liegen könnten.

d) Können Sie jetzt die Verlässlichkeit der Methoden in Aufgabe 1 besser einschätzen? Erklären Sie, warum, oder warum nicht.

Abschließende Aufgabe

Eine Studienkollegin von Herrn Dr. Schmitt, Frau Dr. Maria Osterhoff, arbeitet an einer Universitätsklinik in Brisbane, Australien. Sie untersucht die Gründe für eine Abstoßung und vermutet, dass man die Funktionierenswahrscheinlichkeit durch gezielte Änderung der Essgewohnheit erhöhen kann. Jetzt plant sie eine Langzeitstudie, um ihre Vermutung zu bestätigen. Sie möchte die Patienten mit einrechnen, die aus welchen Gründen auch immer aus der Studie aussteigen. Sie weiß, dass dies die Ergebnisse beeinflusst, aber sie weiß nicht genau, wie man mit zensierten Daten umgeht. Sie fragt Herrn Dr. Schmitt um Rat. Herr Dr. Schmitt bittet daraufhin Ihr Team, das zu seinen Assistenten zählt, eine Information für Frau Osterhoff auszuarbeiten.

Nutzen Sie Ihre Erfahrungen aus den Aufgaben 1 und 2, um eine ausführliche **Empfehlung** für Frau Dr. Osterhoff zu schreiben. Stellen Sie sicher, dass alle Ideen und Details aus den Aufgaben 1 und 2 in der einen oder anderen Weise in diese abschließende Aufgabe eingebunden sind. Fügen Sie mindestens ein detailliertes Beispiel für eine Datenmenge von Patienten hinzu, die Frau Dr. Osterhoff während der Studie hätte erfasst haben können.

In dieser Empfehlung sollen Sie verschiedene Arten besprechen, wie man zu der Wahrscheinlichkeit kommt, die eine Einschätzung für das weitere Funktionieren des Transplantats darstellt. Weisen Sie deutlich auf die Möglichkeiten und die Grenzen der Rechenmethoden hin.

Achten Sie darauf, dass die Empfehlung unabhängig von dieser Aufgabenstellung verstanden werden kann.