

Das geschlossene Gewächshaus



Aufgabe für das Finale der

Alympiade 2008

Garderen,

14. und 15. März 2008

Finale der Mathematik A-lympiade 2008:

Arbeitshinweise

Vorab:

- Lest zunächst die gesamte Aufgabenstellung durch, damit ihr einen Überblick darüber bekommt, was an diesem Wochenende alles zu tun ist.
- Aufgabe 1, in der ihr ein Schema entwerft, hat unter anderem den Zweck, dass ihr euch selbst über das gesamte System des geschlossenen Gewächshauses klar werdet.
- Verteilt Aufgaben, wo es möglich ist, und berätet gemeinsam, wo es nötig ist.

Zeitplanung:

- Nach dem Frühstück am Samstag erhaltet ihr die gesonderte Information zur Charakterisierung von drei Tagen.
- Achtet während der Arbeit an den unterschiedlichen Aufgabenteilen auf die Zeit.
- Plant für die Vorbereitung der Posterpräsentation am Samstag genügend Zeit ein!
- Samstag Mittag um 13 Uhr müsst ihr eure Arbeit abgeben.

Einzureichen

sind die ausgearbeiteten Antworten zu allen Aufgabenteilen. Achtet darauf, dass alle Informationen, die ihr auf dem Poster präsentiert, auch in der Ausarbeitung zu finden sind!

Die Jury bekommt Kopien von eurer Ausarbeitung. Diese Kopien müssen durchweg gut lesbar sein. Schreibt deshalb mit schwarzem Stift und druckt nur im A4-Format. Zeichnungen, die ihr mit abgibt, müssen auch gut kopierbar sein und sollten deshalb nicht mit Bleistift angefertigt werden.

Beurteilung

Bei der Beurteilung wird unter anderem berücksichtigt:

- die Vollständigkeit der Antworten zu den unterschiedlichen Aufgabeteilen;
- der Gebrauch von Mathematik;
- die verwendete Argumentation und die Begründung der getroffenen Entscheidungen;
- der Tiefgang, mit dem die unterschiedlichen Aufgaben beantwortet wurden;
- die Präsentation: Form, Lesbarkeit, grafische Veranschaulichung usw.;
- die Originalität und Kreativität.

Von allen Aufgabenteilen die beiden Abschlussaufträge am stärksten gewichtet. Hierbei werden auch die Verknüpfungen, die ihr zu den ersten vier Aufgaben hergestellt habt, bewertet.

Das geschlossene Gewächshaus



Einleitung

Viel Obst und Gemüse wird in Gewächshäusern gezogen. Insbesondere in der niederländischen Region Westland sieht man solche Gewächshausanlagen, wie sie auf der obigen Abbildung von Google Earth zu erkennen sind. Im Gewächshaus kann man das Klima für die Pflanzen regeln, so dass man vom Wetter nicht mehr abhängig ist. Anders gesagt:

In einem Gewächshaus kann man zu jedem Zeitpunkt die Temperatur und die Lichtmenge auf einen selbst gewählten Wert einstellen.

Die Sonne liefert Licht und mit Lampen stellt man die Lichtversorgung so ein, dass den Pflanzen auch nachts und bei bewölktem Himmel genügend Licht zur Verfügung steht.

Die Sonne liefert auch Wärme: Die Temperatur steigt beträchtlich, wenn die Sonne direkt auf das Gewächshaus scheint – daher stammt die Bezeichnung „Treibhauseffekt“. Wenn die Sonne nicht scheint, kann man auch ganz gewöhnlich heizen. Ist die Temperatur zu hoch, so öffnet man die Fenster. Dadurch entweicht viel Wärme aus dem Gewächshaus. Vor diesem Hintergrund werden die meisten Gewächshäuser nicht eben energiesparend betrieben.

Die neueste agrartechnische Entwicklung ist das **geschlossene Gewächshaus**.

In einem geschlossenen Gewächshaus bleiben die Fenster immer geschlossen. Ein sehr vorteilhafter Nebeneffekt dieser Maßnahme ist, dass keine Ungeziefer mehr in das Gewächshaus gelangen. Darüber hinaus verfügt ein geschlossenes Gewächshaus über eine Heizungsanlage, die gleichzeitig elektrische Energie erzeugen kann, und die Möglichkeit bietet, überschüssige Wärme zu speichern.

Die zentrale Frage in dieser A-lympiade-Aufgabe lautet:

Wie kann man über das Jahr hinweg das Klima (Temperatur und Licht) in einem geschlossenen Gewächshaus regeln, dass die Energiekosten so gering wie möglich bleiben?

Temperatur- und Lichtregulierung

Im geschlossenen Gewächshaus werden Temperatur und Licht wie folgt reguliert:

Licht wird erzeugt durch

- die Sonne
- Lampen.

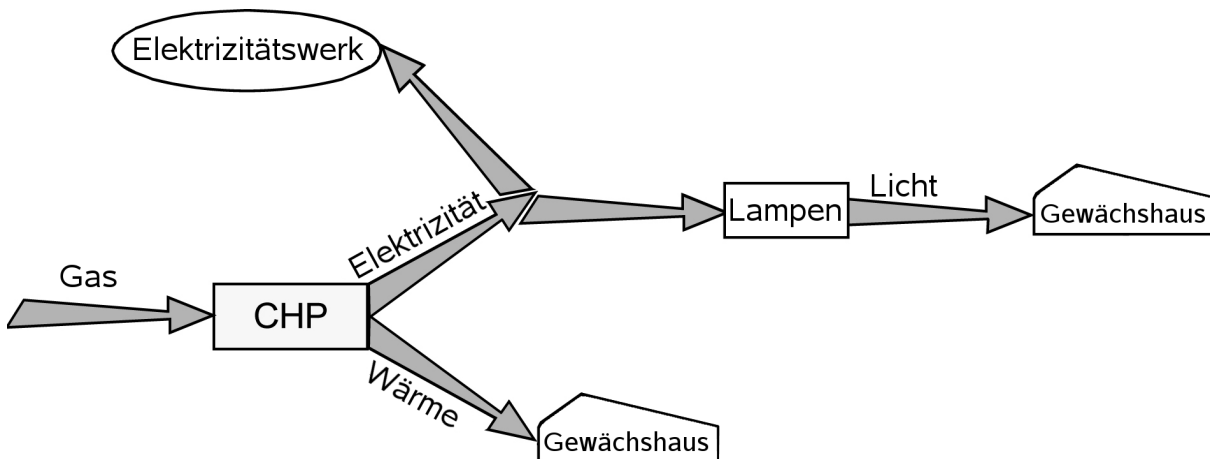
Wärme wird erzeugt durch

- die Sonne
- einen CHP-Generator.

Die Wirkungsweise der Sonne muss hier nicht weiter erläutert werden. Die Lampen werden elektrisch betrieben. Zum CHP-Generator soll hier ein wenig erklärt werden.

CHP steht für Combined Heat & Power. CHP-Generatoren erzeugen sowohl Wärme (sind also „Öfen“) wie auch elektrische Energie. Der CHP, wie er hier von nun an betrachtet wird, wird mit Gas betrieben.

Die elektrische Energie, die der CHP erzeugt, kann man für den eigenen Bedarf verwenden. Falls aber in einem bestimmten Moment keine Verwendung für die elektrische Energie besteht, kann man sie auch an ein Elektrizitätswerk verkaufen. In einem Diagramm kann man diese Überlegungen folgendermaßen darstellen:



Damit sind alle Elemente aus dem System des geschlossenen Gewächshauses beschrieben:

- Energiequellen: Sonne, Gas- und Elektrizitätswerk
Apparaturen: CHP und Lampen
Hauptfaktoren: Wärme und Licht

Damit ihr das System gut versteht, werdet ihr nun einige Zusammenhänge schematisieren.

Aufgabe 1

Entwerft eine schematische, grafische Darstellung, die alle obengenannten Elemente enthält und aus welcher deutlich wird, wie Licht und Wärme in das Gewächshaus gelangen. Stellt dabei auch die Geldströme, die aus den Energiekosten resultieren, mit dar.

Beschränkt euch in der Darstellung auf so wenig Text wie möglich, aber achtet darauf, dass sie auch für jemanden ohne Vorkenntnisse verständlich ist.

Das Gewächshaus in Zahlen



Alle Faktoren, die eine Rolle bei der Regulierung von Temperatur und Licht im Gewächshaus spielen, sind bekannt. Um nun rechnen zu können, müsst ihr einige Daten kennen. Die Wirkung und die Kosten von Wärmen, Abkühlen und Beleuchten sind im Folgenden aufgeführt.

Lampen

- Es gibt 100 Lampen im Gewächshaus.
- Eine Lampe braucht stündlich 5 Cent an Elektrizität.
- Nachts leuchten immer alle 100 Lampen.
- Bei Bewölkung und in den Morgen- und Abendstunden müssen 50 Lampen in Betrieb sein.

Sonne

- Die Sonne liefert in unbewölkten Momenten ausreichend viel Licht.
- An unbewölkten Tagen lässt die Sonne die Temperatur stündlich um 2°C steigen, unabhängig von der Innen- oder Außentemperatur.
- Wenn es im Gewächshaus wärmer als draußen ist, dann sinkt an bewölkten Tagen und nachts die Temperatur im Gewächshaus jede Stunde um 1°C (bis die Außentemperatur erreicht ist).
- Wenn es umgekehrt im Gewächshaus kälter als draußen ist und gleichzeitig die Sonne nicht scheint, dann steigt die Temperatur stündlich um 1°C , bis die Außentemperatur erreicht ist.

CHP

- Der CHP verbraucht, während er in Betrieb ist, stündlich 10 € an Gaskosten.
- Durch den CHP kann die Temperatur im Gewächshaus maximal um 3°C pro Stunde erhöht werden.
- Während er in Betrieb ist, liefert der CHP genau die elektrische Leistung, um alle 100 Lampen zu versorgen.
- Durch den Verkauf der vom CHP erzeugten elektrischen Energie an das Elektrizitätswerk erzielt man maximal 3 € pro Stunde an Einnahmen.
- Der CHP kann auch mit einem Teil der erzeugten elektrischen Energie die Lampen versorgen und den Rest an das Elektrizitätswerk liefern.

Die ersten Pflanzen



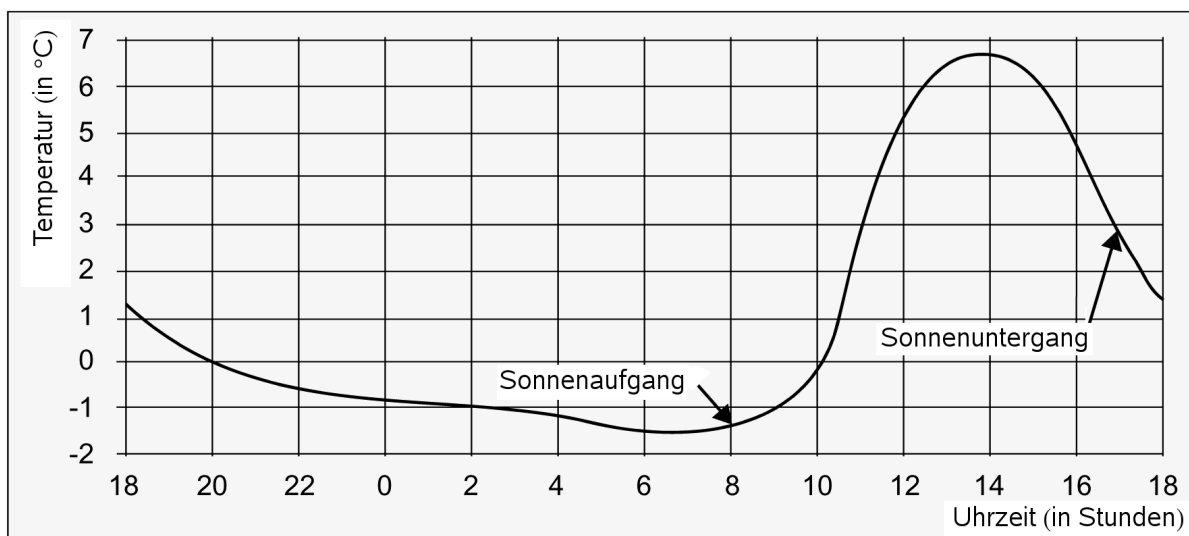
Die ersten Pflanzen, die im Gewächshaus gezüchtet wurden, waren Tomaten. Sie gedeihen am besten unter den folgenden Bedingungen:

- Tagsüber muss die Temperatur nahezu konstant bei 25° C bleiben, nachts darf die Temperatur auf 18° C sinken.
- Die Tomatenpflanzen brauchen Tag und Nacht maximale Lichtversorgung.

Der Gärtner wird versuchen, diese optimalen Bedingungen herzustellen, indem er die Lampen und den CHP entsprechend ein- und ausschaltet. Er will dabei natürlich seine Kosten so gering wie möglich halten. Wann und wie lange der CHP und die Lampen eingeschaltet sein müssen, hängt von den Wetterbedingungen und den sich ständig verändernden Verhältnissen im Gewächshaus ab.

Ein Wintertag kann beispielsweise folgende Wetterbedingungen mit sich bringen:

- Es ist den ganzen Tag lang bewölkt.
- Die Sonne geht um 8:00 Uhr auf und um 17:00 Uhr unter.
- Die Tagestemperatur (draußen) verläuft, wie im folgenden Diagramm dargestellt:



Wie muss der Gärtner die Lampen und den CHP verwenden, um für die Tomatenpflanzen während des gesamten Tages und der ganzen Nacht die passenden Bedingungen im Gewächshaus herzustellen?

Aufgabe 2

Tatsächlich sollt ihr nun die Einstellungen im Gewächshaus simulieren: Ihr sollt angeben, wann die Lampen und der CHP wie eingestellt sind. Diese Einstellungen bestimmen zusammen Temperatur und Lichtverhältnisse im Gewächshaus. Ein weiteres Ziel wird sein, den Betrieb der Apparaturen so preisgünstig wie möglich zu gestalten.

a Die Nacht:

Es ist 22 Uhr und der CHP ist gerade nicht in Betrieb. Alle Lampen sind eingeschaltet. Die Temperatur im Gewächshaus beträgt in diesem Moment 19° C.

Entwerft einen Plan für das Ein- und Ausschalten des CHP und der Lampen, so dass das Licht und die Temperatur im Gewächshaus während der ganzen Nacht (bis 8:00 Uhr) richtig eingestellt sind. Stellt diesen Schaltplan übersichtlich dar und gebt auch für jeden Moment den Wert der Temperatur im Gewächshaus an.

Untersucht mehrere Möglichkeiten für einen Ein- und Ausschaltplan und versucht, eine möglichst kostengünstige Schaltplanung zu finden.

b Der Tag:

Erweitert euren Schaltplan um einen Plan für den Tag (8:00 Uhr – 18:00 Uhr). Untersucht auch hier verschiedene Alternativen um so zur kostengünstigsten und damit auch energiesparensten Methode zu gelangen.

Einen kühlen Kopf bewahren



Das geschlossene Gewächshaus kann mit Hilfe des CHP erwärmt werden. Ihr könnt euch vorstellen, dass an einem extrem sonnigen Tag die Temperatur im Gewächshaus zu hoch wird, höher als die Außentemperatur, auch wenn der CHP außer Betrieb ist. Dies ist der Treibhauseffekt. Man kann dann keine Fenster öffnen.

Die Lösung liegt in der Benutzung des Grundwassers. Wir ersparen euch technische Details. Es läuft darauf hinaus, dass man das kalte Grundwasser als Kühlwasser benutzt. Das System des geschlossenen Gewächshauses wird dann um eine spezielle Pumpe erweitert.

Technische Daten des Kühlsystems:

- Mit Hilfe der Pumpe kann die Temperatur im Gewächshaus um 2°C pro Stunde gesenkt werden
- Die Pumpe wird elektrisch betrieben. Pro Betriebsstunde zahlt man 4 € für elektrische Energie.

Aufgabe 3

Es ist ein sonniger Sommertag. Die Sonne geht um 6:00 Uhr auf und um 21:30 Uhr unter. Die Tagestiefsttemperatur beträgt $18,1^\circ\text{C}$ und die Tageshöchsttemperatur $30,6^\circ\text{C}$.

Entwerft für diesen sonnigen Tag (den gesamten Tag) einen optimalen (also möglichst preisgünstigen) Schaltplan. Gebt an, wann und wie lange die Lampen, der CHP und die Pumpe ein- oder ausgeschaltet sind und wie hoch zu jedem Zeitpunkt die Temperatur im Gewächshaus ist. Gebt die Kosten für eure Schaltung an und begründet, weshalb es die kostengünstigste Schaltung ist.

Verfeinerung des Modells

Naturwissenschaftlich gesehen verläuft das Ansteigen und Abklingen der Temperatur bei abgeschalteter Heizung und ohne Sonnenschein überhaupt nicht so, wie es oben beschrieben ist. Die Menge an Wärmeenergie, die pro Zeiteinheit aus dem Gewächshaus entweicht, kann nicht durch einen festen Wert angegeben werden, sondern ist in Wirklichkeit proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Innen- und Außentemperatur. Mit anderen Worten kühlt das Gewächshaus bei abgeschalteter Heizung schneller ab, wenn der Unterschied zwischen Innen- und Außentemperatur groß ist.

Dies berücksichtigen wir in unserem Modell wie folgt:

Der Wert, um den die Temperatur des (ungeheizten bzw. ungekühlten) Gewächshauses stündlich sinkt, beträgt ein Zehntel des Temperaturunterschiedes zwischen Innen- und Außentemperatur.

Aufgabe 4

Untersucht den Einfluss, den diese Modellerweiterung auf die Ergebnisse der Aufgaben 2 und 3 hat.

Abschlussauftrag 1

- Überlegt euch selbst Wettergegebenheiten zu vier beliebigen Tagen im Jahr und untersucht, mit welchem Schaltplan das Gewächshaus an diesen Tagen am rentabelsten betrieben werden kann.
- Natürlich gibt es extreme Wetterbedingungen, welche die Apparatur (Heizung und Kühlung) nicht mehr ausgleichen kann. Beschreibt so genau wie möglich die Wetterbedingungen eines extremen Winter- und eines extremen Sommertages, an welchem

das Gewächshaus die optimalen Bedingungen für Tomatenpflanzen nicht erfüllen kann.

- c Nehmt eine begründete Schätzung der jährlichen Energiekosten vor, wenn während des ganzen Jahres Tomaten gezogen werden. Macht eure Annahmen alle plausibel.

Abschlussauftrag 2

Inzwischen seid ihr erfahrene ‚Gewächshaus-Fachkräfte‘.

Samstag Morgen erhaltet ihr:

- die charakteristischen Daten für das Wetter an drei verschiedenen Tagen
- eine Beschreibung der Erfordernisse, die das Gewächshaus erfüllen muss (bzgl. Licht und Temperatur)
- die benötigten Anfangswerte.

Bestimmt für jeden Tag einen optimalen Schaltplan für das CHP, die Kühlung (Pumpe) und die Lampen.

Präsentation

Zum Abschluss der A-lympiade werden die Ergebnisse präsentiert. Erstellt ein Poster, das Folgendes enthält:

- die schematische Darstellung aus Aufgabe 1, erweitert um das Kühlsystem
- einen Schaltplan von einem der drei Tage, deren Charakterisierung ihr am Samstag Morgen erhalten habt
- die Gesamtkosten für den Energiebedarf an den drei vorgegebenen Tagen