

Let's play Darts

Aufgabe für das Finale der

Alympiade 2006

Gaderen,
17. und 18. März 2006

Finale der Mathematik A-lympiade 2006:

Arbeitshinweise

Vorab:

- Lest zunächst die gesamte Aufgabenstellung durch, damit ihr einen Überblick darüber bekommt, was an diesem Wochenende alles zu tun ist.
- Die Teile A, B und C müssen nicht in dieser Reihenfolge ausgeführt werden. Für Teil B muss jedes Teammitglied hundert mal Darts werfen. Vergesst nicht, euer Team auf der dafür ausgehängten Liste vorzumerken!
- Verteilt Aufgaben, wo es möglich ist, und berätet gemeinsam, wo es nötig ist.
- Im Abschlussauftrag ist es wichtig, dass ihr eure Kinderscheibe und die zugehörigen Spielregeln vollständig beschreibt und eure Entscheidungen erläutert und begründet.

Zeitplanung:

- Freitag Mittag (ab dem Mittagessen bis zur „Happy Hour“) könnt ihr im zentralen Raum Pfeile werfen (Aufgabenteil B). Vergesst nicht, euch hierfür einzutragen!
- Achtet während der Arbeit an den unterschiedlichen Aufgabenteilen auf die Zeit.
- Plant für die Vorbereitung der Posterpräsentation am Samstag genügend Zeit ein!
- Samstag Mittag um 14 Uhr müsst ihr eure Arbeit abgeben.

Einzureichen

sind die ausgearbeiteten Antworten zu allen Aufgabenteilen. Achtet darauf, dass alle Informationen, die ihr auf dem Poster präsentiert, auch in der Ausarbeitung zu finden sind!

Die Jury bekommt Kopien von eurer Ausarbeitung. Diese Kopien müssen durchweg gut lesbar sein. Schreibt deshalb mit schwarzem Stift und druckt nur im A4-Format. Zeichnungen, die ihr mit abgibt, müssen auch gut kopierbar sein und sollten deshalb nicht mit Bleistift angefertigt werden.

Beurteilung

Bei der Beurteilung wird unter anderem berücksichtigt:

- die Vollständigkeit der Antworten zu den unterschiedlichen Aufgabeteilen;
- der Gebrauch von Mathematik;
- die verwendete Argumentation und die Begründung der getroffenen Entscheidungen;
- der Tiefgang, mit dem die unterschiedlichen Aufgaben beantwortet wurden;
- die Präsentation: Form, Lesbarkeit, grafische Veranschaulichung usw.;
- die Originalität und Kreativität.

Von allen Aufgabenteilen wird der Abschlussauftrag (Teil D) am stärksten gewichtet. Hierbei werden auch die Verknüpfungen, die ihr zu den Teilen A, B und C hergestellt habt, bewertet.

Let's play Darts!

Jelle Klaassen neuer Dartkönig

Jelle Klassen darf sich ein Jahr lang als Dart-Weltmeister bezeichnen (Ausrichtung durch den BDO – British Darts Organisation). In einem atemberaubenden Finale besiegte der 21-jährige

nem nervenaufreibenden Zweikampf, in dem in jedem Leg bis zum letzten Pfeil gekämpft wurde. Bis zum Stand 5-5 gab es keine Entscheidung. Dadurch, dass Klaassen den elften Satz,



Debütant den Favoriten und Titelverteidiger Raymond van Barnefeld mit 7-5. Bereits während des Turniers zeigte Klaassen ein starkes Nervenkostüm und auch die Finalbedingungen brachten ihn nicht aus dem Konzept. Der Mann aus Alphenaar fand sofort in seinen Rhythmus und gewann die ersten beiden Sätze.

„Barney“, der sein Idol, den fünfachen Sieger Eric Bristol im Saal wusste, gewann seine Fassung erst im dritten Satz wieder. Kampflos wollte der Titelverteidiger sich nicht geschlagen geben und gewann die folgenden sieben Legs.

Der darauffolgende Satz entwickelte sich zu ei-

in dem van Barnefeld begann, für sich entscheiden konnte, verschaffte er sich einen erheblichen Vorteil.

Bei einem 2-1 Vorsprung in Legs verwandelte der „junge Matador“ die erste beste Möglichkeit in einen Sieg. Mit einem 100+ finish gewann er den Titel und wurde der jüngste Weltmeister in der Geschichte des BDO.

„Damit habe ich nicht gerechnet“, stammelte der Sieger nach dem Match. „Barney verfehlte einige Doubles und davon konnte ich profitieren. Für mich bleibt er weiterhin die Nummer Eins.“

Aus: <http://www.nos.nl/nosstudiosport>

Eine Sensation beim Lakeside Dartstournier: Jelle Klaassen schlägt als Debütant die gesamte Weltspitze. Während dieses Turniers, das als Weltmeisterschaft für professionelle Darts-Spieler betrachtet wird, wurde ein guter Teil der Welt (auf jedem Fall die gesamten Niederlande) in den Bann des Darts-Spiels gezogen. Es ist nun Zeit für eine mathematische Betrachtung des Darts-Spiels.

Aufgabe

Die Finalaufgabe der Mathematik A-lympiade 2005-2006 behandelt also das Darts-Spiel. Die Aufgabe besteht aus vier Teilen:

Teil A: Spielregeln und Spielverlauf

Hier untersucht ihr, wie ein Spiel mit den bestehenden Regeln verlaufen kann.

Teil B: Das Werfen

Hier untersucht ihr, inwieweit das Wurfmuster ein Maß für die Qualität des Werfers sein kann, und wie ihr eure eigene Qualität als Werfer bestimmt.

Teil C: Die Zahlen auf der Scheibe

Hier erfahrt ihr, aus welchen Gründen und auf welche Weise die Verteilung der Zahlen auf der Scheibe gewählt wurde.

Teil D: Abschlussaufgabe

Hier entwerft ihr selbst eine „Kinderscheibe“.

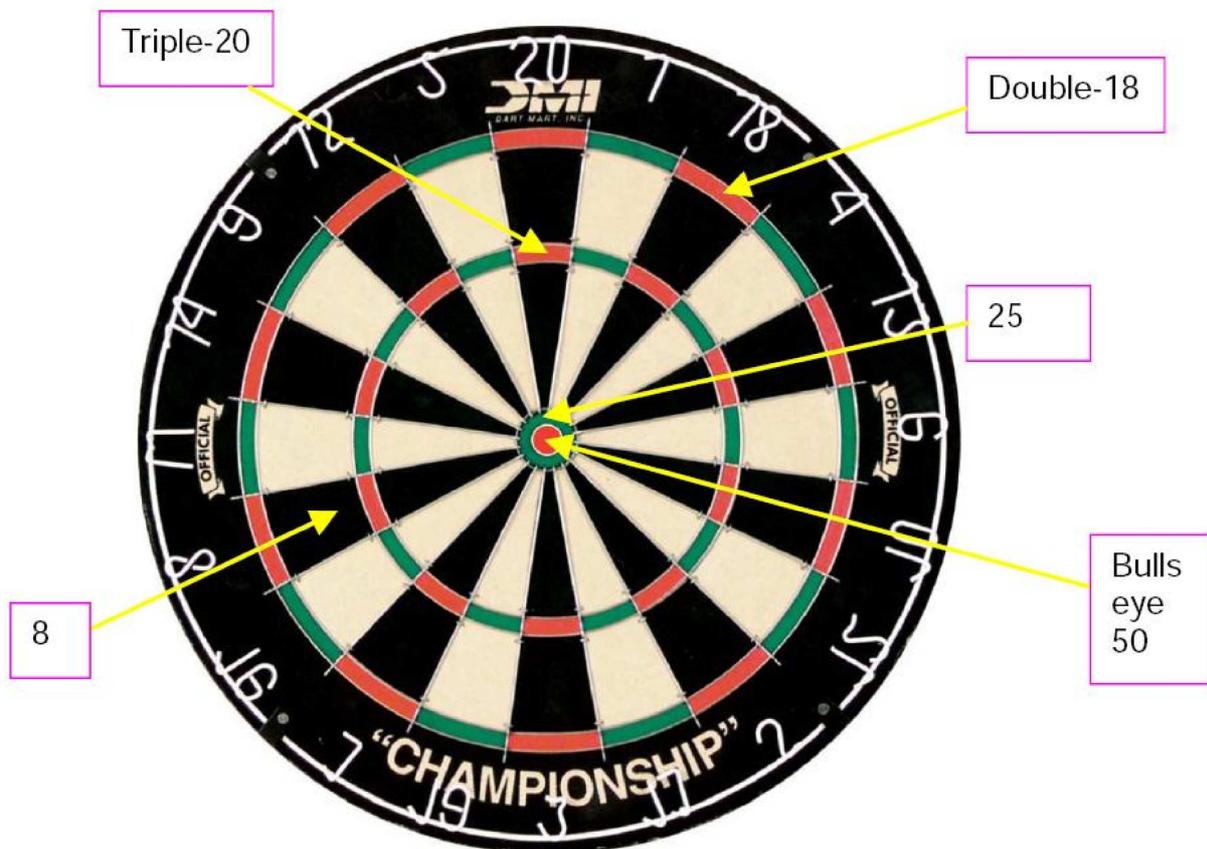
Teil A: Spielregeln und Spielverlauf

Es gibt beim Darts-Spiel unterschiedliche Varianten. Am gebräuchlichsten ist eine Variante, die 501 genannt wird. Die Spielregeln der Variante 501 lauten grob folgendermaßen:

- Zwei Spieler spielen gegeneinander.
- Beide beginnen mit der gleichen Anzahl von 501 Punkten.
- Nacheinander werfen die Spieler jeweils drei Pfeile (ofwel darts) mit dem Ziel, so viele Punkte wie möglich zu erreichen. Nach jedem geworfenen Pfeil wird die Zahl der gewonnenen Punkte von der Gesamtzahl (zu Beginn also 501) abgezogen.
- Nach drei Pfeilen ist der nächste an der Reihe.
- Gewonnen hat, wer als erster auf Null Punkten endet.

Wie erreicht man Punkte?

Hier ist eine Dartsscheibe abgebildet, wie man sie auch bei Wettkämpfen benutzt:



- Wirft man einen Pfeil in das weiße oder schwarze Feld einer Zahl auf der Scheibe, dann erhält man die entsprechende Zahl an Punkten, beispielsweise 8.
- Ein Pfeil im äußersten rot-grünen Ring (double ring) wird doppelt gezählt. Ein Pfeil im äußersten Ring bei 18 (Double-18) zählt beispielsweise $2 \times 18 = 36$ Punkte.
- Wirft man einen Pfeil in den inneren rot-grünen Ring (triple ring), so wird die Zahl dreifach gezählt. Ein Pfeil im inneren Ring bei 20 (Triple-20) wird beispielsweise mit $3 \times 20 = 60$ Punkten gezählt.
- Die kleine rote Kreisfläche im Zentrum der Scheibe heißt „Bulls Eye“. Ein Pfeil im

Bulls Eye zählt 50 Punkte.

- Der kleine grüne Ring um das Bulls Eye heißt 25-er Ring. Ein Pfeil in diesem Ring zählt 25 Punkte.

Die Punktzählung und das Ende des Spiels

Für jeden geworfenen Pfeil wird die erreichte Punktzahl direkt von der aktuellen Gesamtpunktzahl (bei Spielbeginn 501) abgezogen, so dass wieder ein neuer Punktstand entsteht. Das Spiel kann nur mit einem „Double“ oder mit einem Wurf in das Bulls Eye beendet werden. Hat ein Spieler z. B. einen Punktstand von 40 Punkten, dann kann er das Spiel beenden, indem er einen Pfeil in den Double-20 wirft. Verfehlt er den Double und wirft seinen ersten Pfeil in ein einfaches 20er-Feld, dann kann er immer noch gewinnen, wenn er den zweiten Pfeil in den Double-10 wirft. Verfehlt er diesen auch und trifft statt dessen ein einfaches 10er-Feld, dann bleibt ihm für den dritten Pfeil als letzte Möglichkeit, in dieser Runde zu gewinnen, das Double-5-Feld.

Wirft ein Spieler mehr als die zum Gewinn erforderliche Punktzahl, bleibt es beim Punktstand wie vor dem Wurf und der Gegenspieler ist direkt wieder am Zuge. Hat ein Spieler beispielsweise den Stand von 10 Punkten erreicht und wirft dann einen Double-12, so bleibt sein Stand bei 10 Punkten und der Gegenspieler ist direkt wieder am Zuge. Auch wenn ein Spieler mit einem Wurf auf einen Stand von genau einem Punkt kommt, bleibt der alte Punktstand bestehen und der Gegenspieler ist sofort wieder am Zuge. Hat ein Spieler beispielsweise einen Stand von 40 Punkten und wirft einen Triple-13, dann bleibt es beim Punktstand von 40 Punkten, er darf keinen weiteren Pfeil in diesem Zug mehr werfen und der Gegenspieler ist wieder am Zuge.

Ein Spieler mit einiger Erfahrung kann also recht gut einschätzen, welche Möglichkeiten verschiedene Spielstände bieten, eine Partie schnell mit einem Double oder einem Bull Eye zu beenden.

Check-out

Derjenige, der als erster nach den oben beschriebenen Regeln insgesamt 501 Punkte geworfen hat, und damit genau einen Punktstand von Null erreicht, gewinnt das Spiel. Von einem sicheren Zwischenstand aus kann man, wenn man am Zuge ist, das Spiel im selben Zug beenden. Beachte, dass man in jedem Zug drei Pfeile benutzen darf. Der Fachausdruck für diese Situation heißt „Check-out“.

Aufgabe 1:

Beim schnellst möglichen Spielverlauf braucht der Sieger neun Pfeile, um zu gewinnen. Gebt alle möglichen Spielverläufe an, in denen nach den bestehenden Regeln mit neun Pfeilen die 501 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 2:

Jelle Klaassen beendete seine Finalpartie mit einem 100+ Check-out (das ist ein Check-out mit mehr als 100 Punkten). Gebt alle möglichen 100+ Check-outs jeweils mit einer möglichen Abfolge der Würfe an. Verarbeitet hier auch Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 1.

Aufgabe 3:

Es gibt Listen für Check-outs. Erfahrene Darts-Spieler wirken oft so, als wüssten sie alle Möglichkeiten auswendig. Aber auch erfahrene Spieler werfen den Pfeil gelegentlich in ein

Feld, für das er eigentlich nicht gedacht war ...

Hier folgt nun eine solche Check-out Liste. In dieser Liste sind die Check-outs mit zwei Würfeln aufgelistet, so dass man, falls der erste Wurf nicht gelingt, noch zu einer anderen Möglichkeit wechseln kann.

107	Triple 19	Bulls Eye	90	Triple 20	Double 15
104	Triple 18	Bulls Eye	89	Triple 19	Double 16
101	Triple 17	Bulls Eye	88	Triple 20	Double 14
100	Triple 20	Double 20	87	Triple 17	Double 18
98	Triple 20	Double 19	86	Triple 18	Double 16
97	Triple 19	Double 20	85	Triple 15	Double 20
96	Triple 20	Double 18	84	Triple 20	Double 12
95	Triple 19	Double 19	83	Triple 17	Double 16
94	Triple 18	Double 20	82	Bulls Eye	Double 16
93	Triple 19	Double 18	81	Triple 15	Double 18
92	Triple 20	Double 16	80	Triple 20	Double 10
91	Triple 17	Double 20			

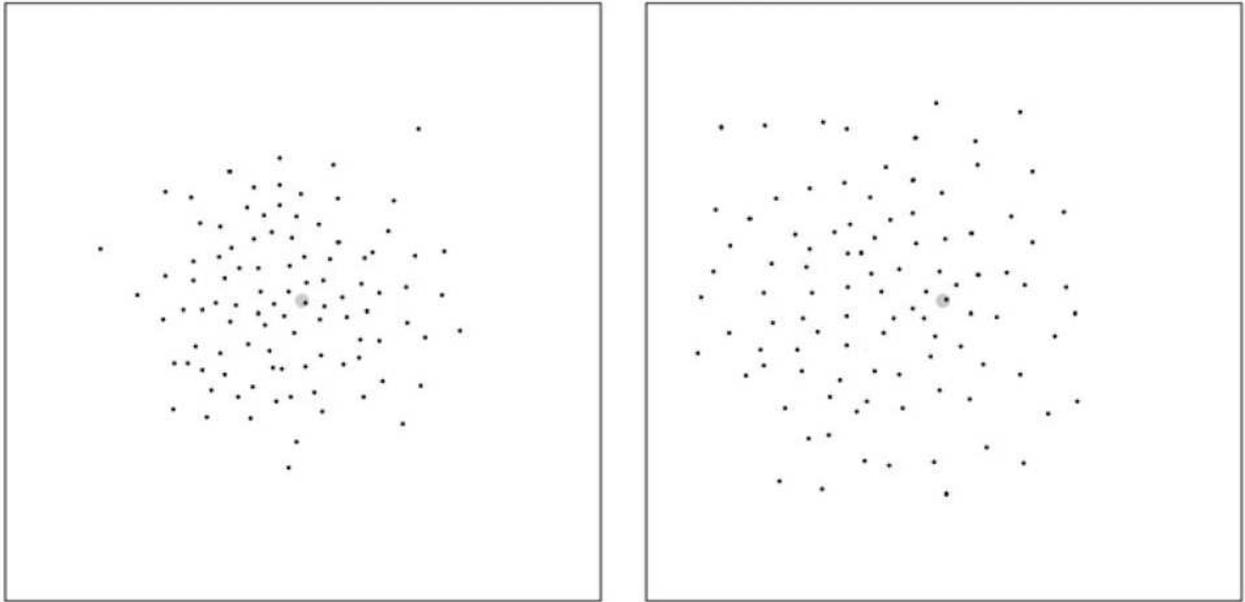
Die hier aufgelisteten Möglichkeiten gelten als optimale Weiterführung eines Zuges, in dem der erste Pfeil bereits sein Ziel verfehlt hat. Untersucht, welche Kriterien diesen „optimalen Möglichkeiten“ zu Grunde liegen. Führt an Hand der gefundenen Kriterien diese Liste für die Check-outs von 79 bis 60 weiter.

Teil B: Das Werfen

Ein guter Darts-Spieler trifft natürlich genau das Feld, das er treffen will. Beim Entwurf des Darts-Spiels und der Dartsscheibe ging man wahrscheinlich davon aus, dass die Fehlwürfe um den Zielpunkt normalverteilt liegen. Bei erfahrenen und guten Spielern kann man davon ausgehen, dass mehr Pfeile in das Ziel oder seine unmittelbare Umgebung gelangen. Aber wie sieht die Verteilung der Würfe aus? Hat jeder Darts-Spieler vielleicht eine Abweichung nach oben oder zur Seite? Linkshänder nach links, Rechtshänder nach rechts oder umgekehrt?

gut zielen

Zwei Personen haben je 100 mal auf einen festen Punkt (beispielsweise das Bulls Eye) gezielt. Auf den Bildern ist zu erkennen, wo die Pfeile gelandet sind.



Anhand dieser Bilder kann man sich unterschiedliche Fragen stellen: Welcher Spieler zielt besser? Haben die Spieler in ihren Zielmustern Unregelmäßigkeiten?

In den folgenden Aufgabenteilen sollt ihr eine Methode entwickeln, um an Hand solcher Muster folgendes zu beurteilen:

- die „Zielgerichtetheit“: Wie „gut“ trifft ein Spieler sein Ziel?
- die „Unregelmäßigkeit“: Zeigt das Wurfmuster „Unregelmäßigkeiten“? Welcher Art und wie groß sind sie?

Aufgabe 4

Entwerft eine Methode, um die „Zielgerichtetheit“ und die „Unregelmäßigkeit“ aus einem solchen Wurfmuster zu ermitteln. Beide Größen müssen durch eine Zahl ausgedrückt werden. Gebt auch jeweils eine Skaleneinteilung dazu, mit der die Zahlen interpretiert werden können. Auf den Arbeitsblättern findet ihr vier Punktmuster, die ihr für euren Entwurf verwenden könnt. (Ihr könnt noch weitere Kopien der Arbeitsblätter erhalten). Beschreibt eure Methode so, dass jeder seine eigene „Zielgerichtetheit“ und seine „Unregelmäßigkeit“ mit eurer Methode bestimmen kann.

Wie gut zielst du?

Wie gut zielst du selbst – beurteilt nach eurer eigenen Methode? Jedes Teammitglied bestimmt an Hand experimenteller Daten (also selbst werfen) seine eigene „Zielgerichtetheit“ und „Unregelmäßigkeit“.

Aufgabe 5

Begeht euch in den zentralen Raum und werft jeweils hundert mal auf einen Zielpunkt auf dem Papierbogen, den ihr dort erhaltet. Markiert die Löcher mit einem dicken Stift und fertigt digitale Fotos für eure Ausarbeitung an. (Eventuell könnt ihr diese Fotos von den Organisatoren machen lassen).

Wenn sich das als notwendig erweist, passt eure Methode an diese Ergebnisse an. Legt in diesem Fall ausführlich dar, wie und weshalb die Anpassung erfolgte.

Teil C: Die Zahlen auf der Scheibe

Warum ist das Dartbrett, wie es ist? Wer hat sich diese Reihenfolge der Zahlen ausgedacht? Der folgende Artikel liefert hierzu einige Hintergrundinformationen.

WHY ARE THE NUMBERS ON A DARTBOARD IN THE ORDER THEY ARE?

This is probably the most asked question about the origins of the modern game. Who was the devious person who structured the segments of the dartboard in such a frustrating manner?

The man who is credited with the 'invention' of the numbering sequence of the modern standard dartboard is BRIAN GAMLIN. Gamlin was a carpenter from Bury in the County of Lancashire, England and came up with the infuriating sequence in 1896, at the age of 44. He died in 1903 before he could patent the idea.

In those days many working men – and in particular those with carpentry skills – manufactured dartboards out of elm or poplar wood as a sideline. This cottage industry was later prevalent across the North of England, the Midlands and the South East as darts grew in popularity from the mid-1920s onwards. The reason for producing dartboards at home, or more properly in the garden shed, was to sell the boards to local pubs, thereby supplementing the family income. However, more often than not, this income never found its way home at all. Dartboards were exchanged for credit in the local pub or money earned would find its way back over the bar.

The numbering of a standard dartboard is designed in such a way as to cut down the incidence of 'lucky shots' and reduce the element of chance. The numbers are placed in such a way as to encourage accuracy. That's it. Pure and simple. The placing of small numbers either side of large numbers e.g. 1 and 5 either side of 20, 3 and 2 either side of 17, 4 and 1 either side of 18, punishes inaccuracy. Thus, if you shoot for the 20 segment, the penalty for lack of accuracy or concentration is to land in either a 1 or a 5. There are 2,432,902,008,176,640,000 different possible arrangements of the 20 segments on a standard dartboard so it is perhaps a little surprising that Gamlin's arrangement of the numbers is almost perfect.

Gamlin himself is an enigma. Like the lost court records in the case of William 'Bigfoot' Annakin, there is a vital piece of information in the Gamlin story that is missing. Despite the most thorough of searches no record can be found of Gamlin's death in 1903. Looking three years either side, for both counties of Lancashire and Suffolk reveal no one of that name terminating at that time. However, the answer may be that this is because Gamlin was on the move.

The Daily Mirror in 1992 was asked the question "Who decided the numbers on a dartboard should be so jumbled and why?" The reply read: "Brian Gamlin of Bury, Lancs, introduced the odd numbering system in our fairgrounds in 1896, boasting 'No Skill Required'. Drunks had no chance, as a test of sobriety, the darts game 'round the clock' (in which players have to score with darts in numerical order) became a great success".

So this is why his death cannot be traced. If Gamlin was a showman then, sure, he would be on the road for at least six months of the year. It makes a lot of sense for the idea to have come from within the fairground community. They were the primary cause of the importation of so many 'French darts' which have, over the years become known as 'fairground darts'. Darts has been a feature of fairground sidestuff from the mid-19th century onwards, so who better than a showman – looking for new ways of attracting punters – to come up with this devious numbering arrangement?

Note: For those new to the game of darts the left-hand side of the dartboard is recommended as there are proportionately more high numbers grouped there, i.e. 16, 8, 11, 14, 9 and 12. No huge scores can be guaranteed with this tactic, but at least you'll never hit 5's or 1's. (At least that's the theory!) This side of the dartboard is known as the 'married man's side' because married men always play safe!

Eine faszinierende Information aus diesem Bericht ist folgende:

There are 2,432,902,008,176,640,000 different possible arrangements of the 20 segments on a standard dartboard so it is perhaps a little surprising that Gamlin's arrangement of the numbers is almost perfect.

Aufgabe 6

Überprüft an Hand einer Berechnung, ob die Zahl 2,432,902,008,176,640,000 stimmt.

Grenzunterschiede

Gamlin wollte Fehltreffer zu einem möglichst großen Nachteil werden lassen. Daher sind zu einem Feld mit einem hohen Wert (beispielsweise 20) immer zwei Felder mit niedrigen Werten (in diesem Fall 5 und 1) benachbart. Diese „Grenzunterschiede“ sind immer so groß wie möglich. Bei einer perfekten Scheibe ist nach diesem Kriterium die Summe der Grenzunterschiede maximal. Die Gamlinscheibe ist eine 198-Scheibe (eine Scheibe, deren Summe aller Grenzunterschiede 198 beträgt). Damit ist die Gamlinscheibe *beinahe* eine perfekte Scheibe nach diesem Kriterium: Das Maximum für die Summe aller Grenzunterschiede einer Dartsscheibe mit den Zahlen 1 bis 20 beträgt nämlich *nicht* 198.

Aufgabe 7

Untersucht, wie groß das Maximum für die Summe aller Grenzunterschiede einer Dartscheibe ist. Wie viele echt unterschiedliche perfekte Scheiben könnt ihr angeben? Begründet eure Überlegungen ausführlich.

Aufgabe 8

Es ist nicht gerade nett von Gamlin, Fehltreffer möglichst stark zu bestrafen. Entwerft auch eine Scheibe, deren Summe aller Grenzunterschiede minimal ist. Erläutert, wie ihr eure Lösung gefunden habt.

Teil D: Abschlussaufgabe

Gamlin hat, so wird behauptet, die Grenzunterschiede als Kriterium für seinen Entwurf des Dartsboards gebraucht. Natürlich kann man auch andere Kriterien für den Entwurf eines Dartsboards zu Grunde legen. In dieser Abschlussaufgabe sollt ihr eine spezielle Dartsscheibe für Kinder entwerfen: Hier kommen nur die Zahlen 1 bis 10 vor.

Benutzt alles, was ihr in den vorangegangenen Aufgaben untersucht und entdeckt habt. Ihr sollt zunächst eure Kriterien formulieren und dann eure Dartsscheibe entwerfen. Sie muss nicht im entferntesten einer Gamlinscheibe gleichen ...

Darüber hinaus gehören zu dieser Scheibe auch Spielregeln. Stellt diese auf und analysiert die möglichen Spielverläufe mit eurer Dartsscheibe gründlich. Arbeitet beispielsweise auch Listen von Check-outs aus. Wie sieht es mit den Wahrscheinlichkeiten für zielgenaue und weniger zielgenaue Spieler aus?

Berücksichtigt bei eurem Entwurf, dass es sich um eine Kinderscheibe handelt. Gebt Spielregeln, mögliche Spielverläufe und was ihr sonst noch für die Spieler und mögliche Beurteilende für relevant haltet.

Präsentation

Samstag Mittag werden die Ergebnisse präsentiert. Erstellt für diese Präsentation ein Poster, auf dem die Kinderscheibe abgebildet ist, sowie die Spielregeln und die wichtigsten Aspekte des Entwurfs wiedergegeben sind. Die Texte auf dem Poster müssen in englischer Sprache formuliert sein.

